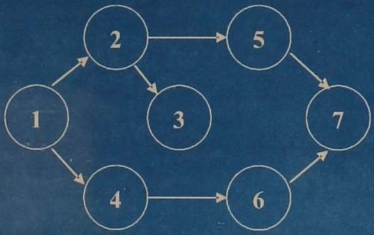
Жусупбаев А., Маматкадырова Г.Т.,
Ашырбаева А.Ж.

ЭКОНОМИКАДАГЫ ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДДОРУ ЖАНА МОДЕЛДЕРИ



КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

**Жусупбаев А., Маматкадырова Г.Т.,
Аширбаева А.Ж.**

Экономикадагы операцияларды изилдөөнүн методдору жана моделдери

*Кыргыз Республикасынын билим берүү
жана илим министрлиги тарабынан
жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн
окуу китеби катарында уруксат кылынган
(2008-жылдын 29 сентябрдын № 583/1 буйругу)*

Бишкек – 2008

УДК 519.8
ББК 65
Ж–94

Рецензенттер:

Какишов К.К. – физ.-матем. илим. доктору, профессор;
Чороев К.Ч. – экон. илим. кандидаты, профессор.

Жусупбаев А. ж.б.

Ж–94 Экономикадагы операцияларды изилдөөнүн методдору жана моделдери. Окуу китеби / А. Жусупбаев, Г.Т. Маматкадырова, А.Ж. Аширбаева – Б.: 2008. – 336 б.

ISBN 978–9967–25–152–6

Окуу китепте экономикада колдонулуучу операцияларды изилдөөнүн негизги математикалык методдору жана моделдери каралган.

Өз алдынча иштөө үчүн мисалдардын топтому берилген.

Китеп жогорку окуу жайлардын экономика, колдонмс математика жана экономикадагы математикалык методдор багыттарындагы студенттерге арналат, ошондой эле ушул багытта иштеген адистер үчүн пайдаланууга болот.

Ж 0601000000–08

УДК 519.8
ББК 65

ISBN 978–9967–25–152–6

МАЗМУНУ

Кириш сөз

Учурдагы экономика илими экономикалык изилдөөлөрдө жана экономикалык процесстерди прогноздоодо математиканын жана компьютердик технологиялардын жаңы жетишкендиктерин кеңири колдонуу менен мүнөздөлөт.

Азыркы күндө операцияларды изилдөөнүн математикалык методдору жана моделдери каалагандай экономикалык илимдеги методдордун негизин түзүүчү бөлүктөрүнөн болуп калды. Аны экономикалык анализ менен бирдикте колдонуу экономикалык илим жана анын колдонулуштары үчүн жаңы мүмкүнчүлүктөрдү пайда кылат. Учурда экономистти даярдоо системасында экономикадагы операцияларды изилдөө негизги методологиялык мааниге ээ.

Операцияларды изилдөө боюнча эне тилинде окуу китептердин тартыш экендиги талашсыз. Ошондуктан, аталган окуу китеп экономикада колдонулуучу операцияларды изилдөөнүн негизги математикалык методдорун жана моделдерин камтыган китептердин алгачкыларынан десек жаңылыш болбойт.

Окуу китеп экономикалык адистиктер үчүн жогорку билим берүүнүн Мамлекеттик стандарттынын талаптарына ылайык жазылды.

Окуу китеп жогорку окуу жайларда экономикадагы метематикалык методдорду жана моделдерди окутуунун көп жылдык тажрыйбаларынын негизинде жазылды.

Алгач окуу китебинде (I гл.) операцияларды изилдөөнүн негизги түшүнүктөрү берилген. Анда операциянын математикалык модели түшүнүгү, операцияларды изилдөө маселелеринин эффективдүүлүк критерийи жана классификациясы каралган.

Кийинки главаларда (II-IX гл.) сызыктуу программалоо моделдери – типтүү маселелердин коюлушу жана мисалдары, теориялык негиздери, түгөйлөштүк теориясы, чечүүнүн методдору каралган жана ошондой эле бүтүн сандуу программалоо маселесин чечүүнүн Гомордун методу, бутактар жана чек аралар методу келтирилген.

X глава оюндар теориясы, тактап айтканда матрицалык оюндарды чечүүнүн методдору каралган.

Окуу китепте сызыктуу программалоо маселеси менен катар сызыктуу эмес программалоо маселелери (XI- XII гл.) каралып, аларды чечүүдөгү классикалык (Лагранждын методу) жана сандык (бөлүкчө-сызыктуу аппроксимация, градиенттик) методдору келтирилген.

XIII главада динамикалык программалоонун маселелери: каражаттарды ишканалардын арасында бөлүштүрүү; ресурстарды тармактардын арасында бир катар жылга оптималдуу бөлүштүрүү; жабдыктарды алмаштыруу каралып, аларды чечүүдө колдонулуучу динамикалык программалоонун методунун жалпы схемасы келтирилген.

Окуу китепте (XIV-XVI гл.) экономикадагы операцияларды изилдөөнүн атайын моделдери: тармактуу пландаштыруу жана башкаруунун моделдери; массалык тейлөөнүн маселелери; запастарды башкаруунун моделдери кеңири каралган. Мазмуну боюнча бири-биринен абдан айрымаланган бул моделдер операцияларды изилдөөнүн негизги жана типтүү класстары болуп саналышат.

Теориялык материалды баяндоо көптөгөн маселелер жана алардын чыгарылыштары менен коштолгон. Ар бир главанын акырында өз алдынча иштөө үчүн маселелер берилген.

Китепте □ белгиси аркылуу далилдөөнүн башталышы жана бүтүшү, ◊ белгиси менен мисал жана маселени чыгаруунун башталышын жана бүтүшү белгиленген.

I глава. ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨНҮН НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨРҮ

1.1. Операцияларды изилдөөнүн предмети

Азыркы учурда башкаруунун жана чечимдерди кабыл алуунун проблемалары илимий изилдөөлөрдө кеңири орунду ээлөөдө. Коомдук турмуштун бардык чөйрөлөрүнүн ичинен математика материалдык өндүрүштү башкаруу, адамдын өндүрүштүк ишмердүүлүгү менен тыгыз байланышкан. Бул байланышты математиканын жана адамзат коомунун өнүгүү тарыхынын бардык этаптарынан көрүүгө болот. Мында адамдардын практикалык ишмердүүлүгү канчалык кенен жана түрдүү болсо, математикалык методдорго талап ошончолук кенен жана түрдүү болот жана аларды колдонуу ошончолук зарыл болот. Математикалык методдорду экономикалык жана башка проблемаларды чечүү үчүн колдонуу «операцияларды изилдөө» деп аталуучу жаңы математикалык тармактын пайда болушуна алып келди. «Операцияларды изилдөө» термини экинчи дүйнөлүк согуштун жүрүшүндө согуштук аракеттерде кабыл алынуучу чечимдерди иштеп чыгуу жана негиздөө үчүн операцияларды изилдөөнүн колдонулгандыгы менен байланышкан аскердик терминологиядан келип чыккандыгын белгилей кетүү керек. Андан кийин изилдөөчүлөрдүн кызыгуулары «тынчтык» чөйрөсүнө экономика, өндүрүш жана өндүрүштү башкаруу маселелерине оогон, бирок предметтин аталышы сакталып калган. Азыркы учурда операция деп аскердик илимде гана эмес, бир кыйла жалпы изилдөөнүн объектиси атап айтканда, максаттуу иш-аракеттердин каалагандай жыйындысы түшүнүлөт. Анын үстүнө жөн гана изилдөө жөнүндө эмес, конкреттүү чечимдерди иштеп чыгуу боюнча да сөз болот, б.а. бул илим анык колдонмо мүнөзгө ээ.

«Операцияларды изилдөө» термини колдонулганда, дээрлик дайыма системаларды моделдештирүүнүн жана алардын мүнөздөөчүлөрүн анализдөөнүн математикалык методдорун иштеп чыгуу жана алардын практикалык колдонулуштары менен алектенүүчү илимий дисциплина жөнүндө сөз болот. Чындыгында, математикалык методдор жана моделдер операцияларды изилдөөдө максатка багытталган ишмердүүлүктүн бардык областтарында оптималдуу чечимдерди кабыл алуу үчүн жана компьютердин жардамында алардын пайдалануунун практикасында борбордук орунду ээлейт.

Операцияларды изилдөө – бул өндүрүштүк системалардын иш жүргүзүүсү жана аларды башкаруу менен байланышкан маселелерге илимий жол болуп саналат. *Система* деп, биргеликте анык бир максатты ишке ашыруучу, өз ара байланышкан элементтердин жыйындысы аталат. Бул берилген аныктоолор так жана толук болбогону менен операцияларды изилдөөнүн предмети жөнүндө жакшы түшүнүк берет. Операцияларды изилдөө – максаттуу багытталган ишмердүүлүктүн бардык областтарында чечимдерди кабыл алуу процессиндеги анализдин сандык методдорунун колдонулуштарынын теориясы деп да айтууга болот. Мына ошентип, операцияларды изилдөөнүн предмети болуп өз ара аракеттенүүчү объекттердин жыйындысы болгон жана кандайдыр конкреттүү максатка жетүүгө арналган системалар саналышат. *Максат* деп, изилденүүчү системага бул же тигил башкаруучулук таасир этүүнү тандоонун жана ишке ашыруунун акыркы жыйынтыгын түшүнөбүз. Өндүрүштүк-коммерциялык чөйрөдө максат, эреже катары пайданы максималдаштырууда же чыгымдарды минималдаштырууда турат. Коммерциялык эмес тейлөөлөр чөйрөсүндө жогорку деңгээлдеги тейлөөгө жетишүүгө далалаттанышат. Мисалы: медициналык мекеменин негизги максаты бейтаптарды эффективдүү дарылоону камсыз кылууда турат.

Бул илимий дисциплинанын өзгөчөлүктөрү менен жакындан таанышуу максатында типтүү бир катар маселелерди карайбыз:

1. Сезондуу товарлардын анык бир көлөмүн сатуу үчүн убактылуу соода түйүндөрүнүн тармагы түзүлөт. Сатуу максималдуу экономикалык эффективдүүлүктү камсыз кыла тургандай түйүндөрдүн санын, алардын жайгашуусун жана ар бириндеги товардык запастарды жана персоналдардын санын аныктоо талап кылынат.

2. Завод бир түрдөгү продукция өндүрөт. Жогорку сапатты камсыздоо үчүн тандалма текшерүү системасы уюштурулат. Текшерүүгө минималдык чыгым сарптап, сапаттын берилген деңгээли камсыздала тургандай текшерүүнү уюштуруу (б.а. текшерүү партиясынын өлчөмүн, тесттердин жыйынын, жараксыз кылуунун эрежесин ж.б. тандоо) талап кылынат.

3. Кандайдыр бир райондо коркунучтуу ооруну аныкташкан. Оорулууларды (инфекцияны алып жүрүүчүлөрдү) аныктоо максатында райондун жашоочуларына медициналык текшерүү уюштурулат. Ага материалдык каражаттар, жабдык, медициналык персонал бөлүнгөн. Мүмкүн болушунча оорулуулурдын жана инфекцияны алып жүрүүчүлөрдүн максималдуу пайызы аныктала тургандай текшерүүнүн планын (медпункттардын санын, аларды жайгаштырууну, адистердин көрүүсүнүн удаалаштыгын) иштеп чыгуу талап кылынат.

Түрдүү областтардан алынган мындай операцияларды изилдөөнүн практикалык маселелеринин типтүү мисалдарын өтө көп келтирүүгө болот, бирок каралган маселелер үйрөнүлүүчү предметтин мүнөздүү өзгөчөлүктөрүн түшүнүүгө жетиштүү.

Каралган маселелер адамзат ишмердүүлүгүнүн түрдүү областтарына таандык болгонуна карабастан, алардын жалпы белгилерин жеңил эле байкоого болот. Алардын ар биринде анык бир максатты көздөгөн кандайдыр бир иш-чара жөнүндө сөз жүрөт. Эреже катары, бул максатка жетүүгө жетектөөчү бир канча жолдор бар. Ар бир маселеде бул иш-чараны өткөрүүнүн жагдайын мүнөздөөчү кандайдыр бир шарттар (жекече учурда пайдаланууга мүмкүн болгон каражаттар) белгилүү.

Бул шарттардын чегинде, ойлонулган иш-чара анык бир пайданы алып келүүчү чечимди кабыл алуу талап кылынат. Операцияны изилдөөчүнүн маселеси максатка жетүүгө багытталган иш-чаралардын системасын уюштуруу боюнча эффективдүү сунуштарды берүүдө турат. Операцияларды изилдөө маселелеринин жалпы белгисинин болушу бул илимдин аппаратын жана методологиялык негизин түзүүчүлөрү менен бирдикте маселелерди чечүүнүн ыкмаларын иштеп чыгууга мүмкүндүк берет. Операцияларды изилдөө маселелеринин анализинде түрдүү математикалык аппарат колдонулат, бирок кеңири колдонулушка оптималдаштыруунун методдору, математикалык программалоо, оюндар теориясы, ыктымалдуулуктар теориясы жана анын жаңы бөлүктөрү (кокустук процесстердин теориясы, массалык тейлөө теориясы, маалымат теориясы), моделдештирүүнүн статистикалык (имитациялык) методдору, Понтрягиндин максимум принциби, комбинатордук математика, жадыбалдар теориясы, графтар теориясы ж.б. ээ болушту.

1.2. Операциянын математикалык модели

Каалагандай предметти баяндоо андагы негизги түшүнүктөрдү берүүдөн башталат. Операцияларды изилдөө маселелеринде кездешүүчү айрым түшүнүктөргө токтолобуз.

Операция деп, бирдиктүү мааниге ээ болгон жана бир максатты көздөгөн аракеттердин, иш-чаралардын жыйындысын айтабыз.

Аныктоодон операция түшүнүгү өтө кеңири экендиги жана практикалык түрдө каалагандай ойнолунган ишмердүүлүктү операция түрүндө көрсөтүүгө боло тургандыгы келип чыгат. Операцияга өндүрүш, соода, саясат, билим берүү, спорт ж.б. тармактардан көптөгөн мисалдарды келтирүүгө болот. Мисалы, өндүрүштүк ишкананын өндүрүштүк планды аткарууга; жаңы технологиялык линияны жөнгө салууга; шаардык транспорттун кыймылынын маршруттарын түзүүгө; жумушчу кадрларга жумуштун жаңы түрлөрүн үйрөтүүгө; техникалык проектти, тажрыйбалык үлгүлөрдү иштеп чыгууга жана аларды сыноого ж.б. га көздөлгөн иш чаралардын системасы.

Операциянын жыйынтыгы аны уюштуруунун, өткөрүүнүн жолдорунан же кээ бир параметрлерди тандоодон көз каранды болот. Параметрлердин анык бир тандалышы *чечим* деп аталат.

Бул же тигил пикир боюнча башкаларына караганда артыгыраак чечим *оптималдуу* деп эсептелинет. Операцияда максаттын болушу бул максатты көздөгөн активдүү катышуучулардын болушун божомолдойт. Мындай катышуучуларды өзгөчө группага бөлүү үчүн операция жүргүзүүчүлөр түшүнүгү колдонулат.

Операция жүргүзүүчү жак деп, берилген операцияда көздөлгөн максатка жетүүгө умтулган жактардын жыйындысын айтабыз.

Андан сырткары операцияда башка аракет этүүчү жактар да катышуусу мүмкүн. Алар операция жүргүзүүчүлөрдүн максатын көздөшпөстөн, операциянын жүрүшүнө таасир этишет, жекече учурда өздүк максаттарды көздөшөт. Жогоруда каралган операциянын мисалында операция жүргүзүүчү жак катары ишкананын жетекчисин эсептөө табигый, бирок камсыз кылуучу уюмдардын, жеткирүүчүлөрдүн, сооданын аракеттерин да эске алуу керек. Операцияны үйрөнүүдө операция жүргүзүүчү жактын позициясы менен ой жүргүзүлөт, ал эми изилдөөнүн негизги маселеси коюлган максатка жетүүгө жетектөөчү эң жакшы жолдорду издөөдө жана аларды баалоодо турат. Ушул көз карашта операция жүргүзүүчү жакта *операцияны изилдөөчү* деп аталуучу катышуучуну бөлүп көрсөтүү максатка ылайыктуу. Операцияны изилдөөчү операция жүргүзүүчү жакка таандык жана ошол эле максатты көздөйт, бирок ал эреже катары аракеттердин жолдорун тандоо боюнча чечимдерди кабыл албайт, анткени операцияны жүргүзүүнүн жагдайын мүнөздөөчү бардык маалымат менен тааныш эмес болот, болгону операция жүргүзүүчү жакка жардам, чечимди кабыл алуунун илимий негизин берет.

Операцияны изилдөөчүнүн негизги куралы болуп математикалык моделдер саналышат. Алардын көп түрдүүлүгүнө карабастан, практикалык түрдө бардык моделдерде катышуучу негизги элементтер болот. Ар кандай операцияда коюлган максатка жетишүү үчүн операция жүргүзүүчү жак кандайдыр бир ресурстардын запасына (мисалы, минералдык сырьего, техникалык жабдыкка, акчага, жумушчу күчкө, компьютерге ж.б. га) ээ болуусу керек. Бул ресурстар *активдүү каражаттар*, ал эми аларды пайдалануунун, сарптоонун ыкмалары операция жүргүзүүчү жактын *стратегиялары* деп аталышат.

Кандайдыр пикир боюнча башкаларына караганда артыгыраак стратегия *оптималдуу* деп эсептелинет. Демек, операция – бул башкарылуучу иш-чара жана операция жүргүзүүчү жактын максатына жетектөөчү стратегияны (б.а. операцияны уюштуруунун ыкмасын мүнөздөөчү параметрлерди) тандоодон көз каранды. Башкача айтканда стратегиялар операциянын жүрүшүнө таасирин тийгизүүчү, операция жүргүзүүчү жак тарабынан *көзөмөлдөнүүчү*, б.а. өздөрү эркин тандоочу факторлор болуп саналышат.

Андан сырткары операциянын жүрүшүнө таасирин тийгизүүчү, бирок операция жүргүзүүчү жактан көз каранды болбогон *көзөмөлдөнбөөчү факторлор* кездешет, мисалы жаратылыштын шарты. Көзөмөлдөнбөөчү факторлорду алар тууралуу операцияны изилдөөчүнүн маалымдуулугуна карата үч группага бөлүүгө болот: фиксирленген, кокустук жана анык эмес.

Фиксирленген көзөмөлдөнбөөчү факторлор – бул маанилери операцияны изилдөөчүгө так белгилүү болгон факторлор. *Кокустук* көзөмөлдөнбөөчү факторлор операцияны изилдөөчүгө бөлүштүрүү закондору так белгилүү болгон кокустук чоңдуктарды беришет. *Анык эмес* көзөмөлдөнбөөчү факторлор детерминирленген же кокустук чоңдуктар болуп саналышат, операцияны изилдөөчүгө алардын мүмкүн болгон маанилеринин аймагы же мүмкүн болгон бөлүштүрүү закондорунун классы белгилүү болушу мүмкүн. Көзөмөлдөнбөөчү факторлор операцияны изилдөөчүнүн көз-карашында баяндалат, ал эми жалпысынан алганда операция жүргүзүүчү жакта операцияны жүргүзүү моментинде аныксыздыкты азайтуучу же таптакыр жок кылуучу кошумча маалымат пайда болуусу мүмкүн экендигин белгилөө зарыл.

Математикалык моделдердин түрдүү классификациясы бар.

Модель – бул түп нусканы алмаштыруучу, берилген изилдөөнүн маанилүү өзгөчөлүктөрүн жана түп нусканын касиеттерин чагылдыруучу объект. Модель математикалык катыштардын жыйындысын берет. Операцияны изилдөөчү моделдин жардамында операциянын касиеттерин үйрөнө алат жана операцияны оптималдуу башкаруу маселесин чече алат. Операциянын моделин түзүүдө эреже катары ал жөнөкөйлөштүрүлөт, схемалаштырылат жана операциянын схемасы бул же тигил математикалык аппараттын (дифференциалдык, интегралдык, алгебралык теңдемелер, теңдемелердин системасы ж.б.) жардамында сүрөттөлөт. Операциянын математикалык моделин түзүү - математикалык терең билимди гана эмес, моделдештирүүчү кубулуштардын маңызын билүүнү талап кылуучу изилдөөнүн эң маанилүү жана жоопту бөлүгү.

Операцияларды изилдөөдө аналитикалык жана статистикалык моделдер кеңири колдонулат. Булардын ар биринин артыкчылыктары жана кемчиликтери бар. Аналитикалык моделдер көбүнчө параметрлердин саны өтө көп болбогон же алардын арасындагы байланыш өтө татаал болбогон учурларда пайдаланылат. Алар изилдөө үчүн түрдүү математикалык методдорду жана ыкмаларды (дифференциалдык жана интегралдык теңдемелер, графтар теориясы, ыктымалдуулуктар теориясы, математикалык программалоо ж.б.) колдонууга мүмкүндүк берүүсү менен да ыңгайлуу болушат. Бул математикалык методдор операциянын негизги факторлорунун арасындагы көз карандылыкты формула менен берүүгө жана кубулушка таандык мыйзам ченемдүүлүктөрдү даана чагылдырууга мүмкүндүк берет. Ал эми башкысы, аналитикалык моделдер көбүнчө оптималдуу чечимдерди издөөгө ылайыкташкан.

Статистикалык моделдер аналитикалыкка караганда так жана толук, одоно жол берүүнү талап кылбайт, операцияны мүнөздөөчү көп сандагы факторлорду эске алууга жана татаал моделдин бир жолку изилдөөсүн жөнөкөйдүн көп жолку изилдөөсү менен алмаштырууга мүмкүндүк берет. Бул модель изилдөөчүнү кызыктырган статистикалык мүнөздөөчүлөрдү компьютердин жардамында алууга мүмкүндүк берүүсү менен да ыңгайлуу. Статистикалык моделдин кемчиликтерине эпсиз чоңдугу, операциянын сандык мүнөздөөчүлөрүн аныктоодо машиналык убакыттын көп сарпталышы, оптималдуу чечимди издөөнүн татаалдыгы кирет. Операцияларды изилдөө ишинин практикасында бул моделдер биргеликте пайдаланылат. Мындай биригүү эки моделдин тең артыкчылыктарын толук колдонууга мүмкүндүк берет.

Аналитикалык моделдерди детерминирленген жана стохастикалык деп бөлүүгө болот. Детерминирленген моделдер колдонулуучу параметрлердин маанилери, чектөөлөр системасынын түрү жана курамы толук анык белгилүү болгон шарттарында баяндалышат. Мындай баяндоо математикалык элестетүүдө бир маанилүүлүккө ээ жана чечимди бир маанилүү аныктоого мүмкүндүк берет. Бул моделдерде операцияны мүнөздөөчү бардык факторлор изилдөөчүгө белгилүү деп эсептелинет. Стохастикалык моделдер кокустук факторлорду камтыйт, алардын бөлүштүрүү закондору гана белгилүү болот. Детерминирленген моделдерден айрымаланып, жыйынтыгы дайыма анык эмес болгон кокустук процесстерди сүрөттөшөт жана аларда колдонулуучу маалыматтар жыйынтыктын прогноздук маанисин аныкташат. Стохастикалык моделдерге караганда детерминирленген моделдер кеңири иштелип чыккан жана практикалык колдонууга ээ. Операцияларды изилдөөнүн кээ бир моделдеринде коэффициенттер, белгисиз өзгөрүлмөлөр жана экономикалык процесстердин өз ара байланышы убакыттын бир нече этаптарынан көз каранды болушат (көп этаптуу моделдер), ошондуктан ар бир этап үчүн (бир этаптуу модель) удаалаш оптималдык чечимдердин жыйындысы аныкталат. Азыркы учурда терең үйрөнүлгөн моделдердин классы болуп, сызыктуу жана сызыктуу эмес программалоонун, динамикалык программалоонун, запастарды башкаруунун, массалык тейлөөнүн, оюндар теориясынын моделдери, тармактык жана имитациялык моделдер саналышат.

1.3. Операциянын эффективдүүлүк критерийи

Операцияларды изилдөөнүн негизги маселеси түрдүү стратегияларды өз ара салыштырууда жана буларга тиешелүү операциялардын түрдүү натыйжаларын баалоодо турат. Операциянын натыйжасын баалоо үчүн эффективдүүлүк критерийи (мындан башка түрдүү терминдер да колдонулат: оптималдуулук критерийи, сапат критерийи, эффективдүүлүк көрсөткүчү ж.б.) колдонулат. Системанын иш жүргүзүүсүнүн эффективдүүлүк критерийи – бул анын сапатынын мүмкүн болгон критерийлеринин (белгилеринин) бири, тагыраак айтканда анын иш жүргүзүүсүнүн мүмкүн болгон варианттарынын ичинен системанын иш жүргүзүүсү эң жакшы болгон белгиси. Экономикалык чечимдерди кабыл алуу чөйрөсүндө эффективдүүлүк критерийи – бул мүмкүн болгон чечимдерди баалоо, алардын ичинен эң жакшысын тандоо үчүн, кабыл алынган чарбалык чечимдин экономикалык пайдалуулугунун пределдик ченемин туюндуруучу көрсөткүч. Көбүнчө пайданын максимуму же чыгымдын минимуму колдонулат. Эффективдүүлүк критерийи адатта сандык мүнөзгө ээ жана бир варианттын башкага караганда канчалык жакшы же начар экендигин көрсөтөт. Операцияларды изилдөөнүн моделдеринде эффективдүүлүк критерийдин математикалык формасы болуп максаттуу функция саналат, анын экстремалдык мааниси моделдештирилүүчү объекттин пределдик мүмкүн болгон эффективдүүлүгүн мүнөздөйт. Мисалы, ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселеде эффективдүүлүк критерийи – өндүрүлгөн продукцияны сатуудан түшкөн пайда, аны максималдаштыруу талап кылынат, транспорттук маселеде – жеткирүүчүлөрдөн керектөөчүлөргө жүктөрдү ташууга кеткен суммардык чыгымдар, аны минималдаштыруу талап кылынат. Мына ошентип, эффективдүүлүк критерийи коюлган максатка жетүүнүн деңгээлин сандык баалоого мүмкүндүк берүүчү, операциянын максатынын математикалык эквиваленти болуп саналат. Эффективдүүлүк критерийин тандоо изилдөөнүн практикалык баалуулугун аныктайт. Конкреттүү мисалдарды кароодо максималдаштырылышы, ошондой эле минималдаштырылышы зарыл болгон эффективдүүлүк критерийлерин колдонобуз. Эгерде классификациялоочу белги катары жалпылык даражасын алсак, анда экономикалык система үчүн мамлекеттин деңгээлинде өнүгүүнүн глобалдык жана моделдердин жекече системаларында локалдык эффективдүүлүк критерийлери бар. Критерийлерди глобалдык жана локалдыкка бөлүү моделдердин каалагандай иерархиялуу системасына таандык болушу мүмкүн, мисалы тармактын же ишкананын модели. Ишкананын ишмердүүлүгүнүн эффективдүүлүк критерийинин системасы продукциянын негизги типтерин өндүрүүнүн көлөмүн, пайда чоңдугун, сапаттын жогорку категориясындагы продукциянын салыштырмалуу салмагын, эмгек өндүрүмдүүлүгүн, продукциянын өздүк наркын, эмгек акы фондун камтыйт.

Тармактык системанын критерийлеринин системасы өндүрүлүүчү продукцияга болгон коомдук керектөөнү канааттандырууну, илимий-техникалык прогресстин жетишкендиктерин жайылтууну, пландык тапшырмалардын аткарылуу ишенимдүүлүгүн камсыздоону камтыйт. Тармактык системалардын тышкы байланыштары, демек, алардын максаттарынын комплекси убакыт фактору, уюштуруунун мейкиндиги, түрдүү ыкмаларды жана пландаштыруунун аспекттерин айкалыштыруу менен татаалданат. Математикалык түрдө глобалдык эффективдүүлүк критерийди максаттардын бардык көп түрдүүлүгүн жалпы туюндуруучу скалярдык максаттуу функция түрүндө же бири-бирине келтирилбөөчү максаттуу функциялардын жыйындысын берүүчү вектордук функция түрүндө баяндоо кабыл алынган. Операцияларды изилдөөнүн моделдеринде операциянын максаттарынын эки (сандык жана сапаттык) түрүн жана тиешелүү түрдө эффективдүүлүк критерийинин да эки түрүн белгилөөгө болот. Сапаттык максатка туура келүүчү эффективдүүлүк критерийи максатка жетүү же жетпөө фактын мүнөздөйт. Сандык максатка туура келүүчү эффективдүүлүк критерийи максатка жетүүнүн деңгээлин мүнөздөөчү жана стратегиялардан жана көзөмөлдөнбөөчү факторлордон көз каранды болгон кандайдыр бир көрсөткүчтү чоңойтуу же кичирейтүү аракетинен турат, б.а. максатка жетүү даражасынын сандык ченеми болгон бул көрсөткүч эффективдүүлүк критерийи болуп саналат.

кароодо максималдаштырылышы, ошондой эле минималдаштырылышы зарыл болгон эффективдүүлүк критерийлерин колдонобуз. Эгерде классификациялоочу белги катары жалпылык даражасын алсак, анда экономикалык система үчүн мамлекеттин деңгээлинде өнүгүүнүн глобалдык жана моделдердин жекече системаларында локалдык эффективдүүлүк критерийлери бар. Критерийлерди глобалдык жана локалдыкка бөлүү моделдердин каалагандай иерархиялуу системасына таандык болушу мүмкүн, мисалы тармактын же ишкананын модели. Ишкананын ишмердүүлүгүнүн эффективдүүлүк критерийинин системасы продукциянын негизги типтерин өндүрүүнүн көлөмүн, пайда чоңдугун, сапаттын жогорку категориясындагы продукциянын салыштырмалуу салмагын, эмгек өндүрүмдүүлүгүн, продукциянын өздүк наркын, эмгек акы фондун камтыйт.

Тармактык системанын критерийлеринин системасы өндүрүлүүчү продукцияга болгон коомдук керектөөнү канааттандырууну, илимий-техникалык прогресстин жетишкендиктерин жайылтууну, пландык тапшырмалардын аткарылуу ишенимдүүлүгүн камсыздоону камтыйт. Тармактык системалардын тышкы байланыштары, демек, алардын максаттарынын комплекси убакыт фактору, уюштуруунун мейкиндиги, түрдүү ыкмаларды жана пландаштыруунун аспекттерин айкалыштыруу менен татаалданат. Математикалык түрдө глобалдык эффективдүүлүк критерийди максаттардын бардык көп түрдүүлүгүн жалпы туюндуруучу скалярдык максаттуу функция түрүндө же бири-бирине келтирилбөөчү максаттуу функциялардын жыйындысын берүүчү вектордук функция түрүндө баяндоо кабыл алынган. Операцияларды изилдөөнүн моделдеринде операциянын максаттарынын эки (сандык жана сапаттык) түрүн жана тиешелүү түрдө эффективдүүлүк критерийинин да эки түрүн белгилөөгө болот. Сапаттык максатка туура келүүчү эффективдүүлүк критерийи максатка жетүү же жетпөө фактын мүнөздөйт. Сандык максатка туура келүүчү эффективдүүлүк критерийи максатка жетүүнүн деңгээлин мүнөздөөчү жана стратегиялардан жана көзөмөлдөнбөөчү факторлордон көз каранды болгон кандайдыр бир көрсөткүчтү чоңойтуу же кичирейтүү аракетинен турат, б.а. максатка жетүү даражасынын сандык ченеми болгон бул көрсөткүч эффективдүүлүк критерийи болуп саналат.

A мааниси гана алынат жана ал кепилденген деп эсептелинет, б.а. $f_2 = \min\limits_{y \in Y} f(x,y)$ деп алабыз.

Мындай баа эффективдүүлүктүн *кепилденген баасы* деп аталат.

Ошентип, түрдүү факторлуу операциялардын моделдеринде операциянын ар бир конкреттүү максатына өзүнчө эффективдүүлүк критерийи тиешелеш болот. Эффективдүүлүк критерийдин максимумун же минимумун табууга алынып келинген каалагандай маселени *оптималдаштыруунун маселеси* деп атайбыз. Кээде практикада операциялардын стратегиясынын эффективдүүлүгүнүн баасы бир учурда бир нече критерий боюнча бааланат, айрымдарын минималдаштыруу, айрымдарын максималдаштыруу керек болот. Мындай маселелер операцияларды изилдөөнүн көп критериялуу маселеси болуп саналышат. Бул маселелерде көпчүлүк учурларда мүмкүн болгон чечимдердин көптүгүнөн бардык критерийлер боюнча башкаларына жол берүүчү чечимдердин ийгиликсиз варианттарын таштап жиберүү ыкмасы колдонулат. Мындай процедуранын жыйынтыгында көптүгү баштапкыдан олуттуу кичине болгон эффективдүү чечимдер калышат.

1.4. Операцияларды изилдөө маселелеринин классификациясы

Операцияларды изилдөөнүн бардык маселелерин операциянын касиеттерине жана жаратылышына, чечилүүчү маселелердин мүнөзүнө, колдонулуучу математикалык методдордун өзгөчөлүктөрүнө карата классификациялоого болот. Баарынан мурда оптималдаштыруу маселеринин чоң классынын классификациясына токтолобуз. Мындай маселелер татаал системаларды, биринчи кезекте экономикалык системаларды пландаштырууну жана башкарууну оптималдаштыруу аракеттеринде келип чыгат. Жалпы учурда оптималдаштыруу маселелеринин математикалык коюлушу

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \; i = 1, 2, ..., m$$

чектөөлөрүндө

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to max(min)$$

максаттуу функциясынын максималдуу же минималдуу маанисинин аныктоодо турат.

Мында
$f, \varphi_i, i = 1,2,...,m$ - берилген функциялар,
$x_j, j = 1,2,...,n$ - изделүүчү терс эмес өзгөрүлмөлөр,
$b_i, i = 1,2,...,m$ - кандайдыр бир чыныгы турактуу сандар.

Максаттуу функциянын жана чектөөлөрдүн түрүнө карата операцияны изилдөөнүн моделдери төмөнкүдөй класстарга бөлүнөт: сызыктуу - мында максаттуу функция жана чектөөлөр сызыктуу функциялар менен туюнтулат (мисалы, ресурстарды пайдалануу, рационду түзүү, кубаттуулуктарды пайдалануу, жабдыктардын жүктөлүшү жөнүндөгү ж.б. маселелер), аларда кандайдыр бир эффективдүүлүк критерийи (мисалы, пайда, киреше, ресурстардын сарпталышы ж.б.) максималдык же минималдык маанини кабыл алуучу чечимди табуу талап кылынат; сызыктуу эмес - максаттуу функция жана чектөөлөр сызыктуу эмес функциялар менен туюнтулат (мисалы, жайгаштыруунун сызыктуу эмес модели, кеңейүүчү экономика үчүн Неймандын модели, технологиялык өндүрүштүк функциянын негизинде факторлорду оптималдуу тандоо, тармактагы газдын агымын оптималдаштыруу); дискреттик – белгисиз өзгөрүлмөлөр дискреттүү гана маанилерди ала алышат (жайгаштыруунун бүтүн сандуу маселеси, дайындоолор жөнүндөгү маселе). Сызыктуу эмес программалоонун маселелеринин ичинен кеңири изилденгени болуп томпок программалоонун маселелери эсептелинет. Аларды чечүүдө томпок функциянын минимуму (иймек функциянын максимуму) томпок көптүктө аныкталат. Томпок программалоонун маселелеринен квадраттык программалоонун маселелери толук иштелип чыккан. Мында квадраттык функциянын максимумун (же минимумун) өзгөрүлмөлөрү сызыктуу барабарсыздыктардын жана (же) теңдемелердин системасын канааттандырган учурда табуу талап кылынат. Сызыктуу эмес дискреттик маселелердин көпчүлүгүн рекуренттик ыкманын жардамында чыгарууга болот. Мындай түрдөгү методдордун жыйындысы динамикалык программалоо деген аталыш менен бириктирилет. Динамикалык программалоо көп кадамдуу башкарылуучу процесстерди жана убакыттан көз каранды процесстерди оптималдуу пландаштырууга мүмкүндүк берүүчү математикалык аппарат болуп эсептелет. Эгерде максаттуу функция же өзгөрүлмөлөрдүн мүмкүн болгон өзгөрүү аймагын аныктоочу функциялар (чектөөлөр системасы) параметрлерден көз каранды болсо, параметрдик программалоонун маселесин алабыз. Эгерде бул функцияларда кокустук чоңдуктар катышса, анда мындай маселелер стохастикалык программалоонун маселеси болуп саналышат. Чектөөлөр системасы сызыктуу, ал эми максаттуу функциясы сызыктуу функциялардын катышы болгон маселе бөлүкчө-сызыктуу программалоо маселеси болуп эсептелет. Бул маселелердин ичинен кеңири изилденгени сызыктуу программалоонун маселелери болушат. Аларды чечүүнүн түрдүү методдору, алгоритмдери жана программалары иштелип чыккан. Операцияларды изилдөөнүн маселелерин мазмуну боюнча да түрдүү класстарга бөлүүгө болот.

Тармактуу пландаштыруу жана башкаруунун маселелеринде ири операциялардын (жумуштардын) комплексинин аяктоо мөөнөттөрү менен комплекстин бардык операцияларынын башталуу моменттеринин арасындагы катыштар каралат. Бул маселелер операциялардын комплексинин минималдуу аткарылуу мөөнөттөрүн, алардын нарк чоңдугу менен аткарылуу мөөнөттөрүнүн оптималдуу катышын табууда турат.

Массалык тейлөөнүн маселелери талаптарды кезектүү тейлөө системаларын үйрөнүүгө жана анализдөөгө арналган жана системалардын ишинин эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн, алардын оптималдуу мүнөздөөчүлөрүн, мисалы, тейлөө каналдарынын санын, тейлөө убактысын ж.б. аныктоодо турат.

Запастарды башкаруунун маселелери запастардын деңгээлдеринин жана буюртманын өлчөмүнүн оптималдуу маанилерин аныктоодо турат. Запастардын деңгээлинин өсүшү менен биринчиден сактоого кеткен чыгымдар өсөт, экинчиден запасталуучу продуктуга мүмкүн болгон тартыштыктан келип чыгуучу жоготуулар азаят. Бул маселелердин өзгөчөлүктөрү мына ушунда турат.

Ресурстарды бөлүштүрүү маселелери чектүү ресурстарда аткарылуусу зарыл болгон операциялардын (жумуштардын) анык бир жыйындысында пайда болот жана операциялардын же операциялардын курамынын арасында ресурстарды оптималдуу бөлүштүрүү талап кылынат.

Ремонт жана жабдыктарды алмаштыруу жөнүндөгү маселелер жабдыктын иштен чыгуусу жана эскирүүсү, убакыттын өтүшү менен аны алмаштыруу менен байланышкандыгы үчүн актуалдуу. Маселелер оптималдуу иштетүү мөөнөттөрдү, профилактикалык ремонттордун жана текшерүүлөрдүн санын, жабдыктарды жаңылары менен алмаштыруу моменттерин аныктоого алынып келинет.

Жадыбал түзүүнүн (календардык пландаштыруунун) маселелери түрдүү жабдыктарда операцияларды аткаруунун (мисалы, тетиктерди кайра иштетүүнүн) оптималдуу кезектүүлүгүн аныктоодо турат.

Пландаштыруунун жана жайгаштыруунун маселелери жаңы объектерди жайгаштыруунун оптималдуу санын жана ордун иш жүргүзүп жаткан объекттер менен жана өз ара аракеттерин эске алуу менен аныктоодо турат.

Маршрутту тандоонун маселелери же ***тармактык*** маселелер транспорт жана байланыш системаларындагы түрдүү маселелерди изилдөөдө кездешет жана экономдуу маршруттарды аныктоо талап кылынат.

Операцияларды изилдөөнүн моделдеринин арасынан ***оюндар теориясында*** үйрөнүлүүчү конфликтүү жагдайларда оптималдуу чечимдерди кабыл алуунун моделдерин бөлүп көрсөтүүгө болот. Түрдүү максаттарды көздөгөн эки (же андан көп) жактын кызыгуулары кагылышуучу конфликтүү жагдайларга экономика, укук, аскердик кызматтардагы ж.б. бир катар жагдайларды мисал катары келтирүүгө болот. Оюндар теориясынын маселелеринде катышуучулардын жүрүшү боюнча сунуштарды иштеп чыгуу, алардын оптималдуу стратегияларын аныктоо зарыл.

II глава. СЫЗЫКТУУ ПРОГРАММАЛОО МАСЕЛЕСИНИН ЖАЛПЫ КОЮЛУШУ

2.1. Айрым экономикалык маселелердин математикалык моделдерин түзүү

1. Ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселе. Ишкана P_1 жана P_2 түрдөгү продукцияларды өндүрүү үчүн S_1, S_2, S_3 жана S_4 төрт түрдөгү ресурстарды пайдаланат. Ресурстардын запастары, продукциялардын бирдигин даярдоодо сарпталуучу ресурстардын бирдиктери 1-таблицада келтирилген.

1-таблица

Ресурстун түрлөрү	Ресурстун запасы	Продукциялардын бирдигин даярдоодо сарпталуучу ресурстардын бирдиктери	
		P_1	P_2
S_1	30	3	5
S_2	21	3	2
S_3	24	4	-
S_4	8	-	1

P_1 жана P_2 продукцияларын реализациялоодон түшкөн пайда тиешелүү түрдө 4 жана 5 акча бирдикти (а.б.) түзөт.

Продукцияларды сатуудан түшкөн пайда максималдуу боло тургандай өндүрүүнүн планын тапкыла.

◊ Маселенин экономика-математикалык моделин түзөлү.

x_1, x_2 аркылуу тиешелүү түрдө өндүрүүгө пландаштырылган P_1 жана P_2 продукцияларынын бирдигинин санын белгилейли. Аларды өндүрүү үчүн S_1 ресурсунан $(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$ бирдик, S_2 ресурсунан $(3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ бирдик, S_3 ресурсунан $(4 \cdot x_1)$ бирдик жана S_4 ресурсунан $(1 \cdot x_1)$ бирдик талап кылынат. S_1, S_2, S_3 жана S_4 ресурстарын пайдалануу запастарынан, б.а. тиешелүү түрдө 30, 21, 24 жана 8 бирдиктеринен ашпоосу керек. Андыктан ресурстарды керектөө менен запастардын арасындагы байланыш:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 4x_1 \qquad \le 24, \\ \qquad x_2 \le 8 \end{cases} \tag{2.1}$$

барабарсыздыктар системасы түрүндө жазылат. Маселенин шартынан

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \tag{2.2}$$

экендиги алынат.

P_1 продукциясын сатуудан $4x_1$ а.б., P_2 продукциясын сатуудан $5x_2$ а.б. пайда түшкөндүктөн, суммардык пайданы

$$F = 4x_1 + 5x_2 \tag{2.3}$$

чоңдугу түзөт.

Натыйжада маселе экономика-математикалык түрдө төмөнкүчө коюлат: (2.3)-функция максималдык мааниге ээ боло тургандай (2.1)-, (2.2)-шарттарын канааттандыруучу өндүрүүнүн $X=(x_1,x_2)$ планын тапкыла. ◊

Маселени m түрдөгү ресурсту пайдалануу менен n продукцияны өндүргөн учурга жеңил эле жалпылаштырууга болот.

$x_j, \ j=1,2,...,n$ аркылуу тиешелүү түрдө $P_j, \ j=1,2,...,n$ продукциясынын өндүрүүгө пландаштырылган көлөмүн; $a_{ij}, \ i=1,2,...,m, \ j=1,2,...,n$ - $P_j, \ j=1,2,...,n$ продукциясынын бирдигин даярдоодо сарпталган $S_i, \ i=1,2,...,m$ ресурсунун бирдигинин саны; $c_j, \ j=1,2,...,n$ менен $P_j, \ j=1,2,...,n$ продукциясынын бирдигин сатуудан түшкөн пайданы белгилейбиз.

Анда жалпы түрдө ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселенин экономика-математикалык модели төмөнкүчө болот:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2.4}$$

функциясы максималдык мааниге ээ боло тургандай жана

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, ..., \ x_n \ge 0 \quad (2.6)$$

шарттарын канааттандыра тургандай өндүрүүнүн $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ планын тапкыла.

2. Рационду түзүү жөнүндөгү маселе. Курамы S_1, S_2, S_3 аш болумдуу заттарынан турууучу тоюттун I жана II түрү болсун. Тоюттардын 1 кг. дагы аш болумдуу заттардын бирдигинин саны жана аш болумдуу заттардын зарыл болгон бирдигинин саны 2- таблицада келтирилген.

2-таблица

Аш болумдуу зат	Аш болумдуу заттын зарыл болгон бирдигинин саны	Тоюттун 1 кг. дагы аш болумдуу заттын бирдигинин саны	
		I	II
S_1	10	1	5
S_2	18	3	4
S_3	9	3	1

I жана II тоюттун 1 кг. сынын наркы тиешелүү түрдө 15 жана 9 а.б.

Тоюттардын курамындагы аш болумдуу заттар керектүү өлчөмдөн кем болбой тургандай, минималдуу нарктагы 1 күндүк рационду түзгүлө.

◊ Маселенин экономика-математикалык моделин түзөлү.

x_1, x_2 аркылуу 1 күндүк рациондогу тиешелүү түрдө I жана II тоюттун бирдигинин санын белгилейбиз. Анда рациондун курамында S_1 аш болумдуу затынын $(1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$ бирдиги, S_2 нин $(3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2)$ бирдиги, S_3 затынын $(3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ бирдиги болот. Рациондо S_1, S_2 жана S_3 аш болумдуу заттары тиешелүү түрдө 10, 18 жана 9 бирдиктен кем болбоо шартынан

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 18, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \end{cases} \quad (2.7)$$

барабарсыздыктар системасы алынат. Мындан сырткары өзгөрүлмөлөр

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (2.8)$$

шартын канааттандыруусу керек.

Рациондун наркы

$$F = 15x_1 + 9x_2\,. \qquad (2.9)$$

Демек, маселенин экономика-математикалык модели: (2.9)-функция минималдык мааниге ээ боло тургандай 1 күндүк рациондун (2.7)-системаны жана (2.8)-шартты канааттандырган $X = (x_1, x_2)$ планын тапкыла. ◊

Маселенин коюлушун жалпылоо үчүн төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизели: $x_j,\ j = 1,2,...,n$ - j - тоюттун бирдигинин саны; $b_i,\ i = 1,\ 2,...,m$ - рациондогу S_i аш болумдуу заттын зарыл болгон бирдигинин саны; a_{ij} - j - тоюттагы S_i затынын бирдигинин саны; c_j - j - тоюттун бирдигинин наркы.

Анда маселенин экономика-математикалык модели төмөндөгүдөй болот:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (2.10)$$

функциясы минималдык мааниге ээ боло тургандай рациондун

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \qquad (2.11)$$

системасын жана

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ...,\ x_n \geq 0 \qquad (2.12)$$

шартын канааттандыруучу $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ планын тапкыла.

3. Кубаттуулуктарды пайдалануу жөнүндөгү маселе. Ишканага T убакыт ичинде $P_1, P_2, ..., P_k$ продукцияларын тиешелүү түрдө $n_1, n_2, ..., n_k$ бирдикте өндүрүү тапшырмасы берилген. Продукция $S_1, S_2, ..., S_m$ станокторунун жардамында даярдалат.

Ар бир станоктун өндүрүмдүүлүгү $a_{ij}, i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,k$, б.а. $S_i, i=1,2,...,m$ станогу менен даярдалган $P_j, j=1,2,...,k$ продукциясынын саны жана убакыт бирдик ичинде P_j продукциясын $S_i, i=1,2,...,m$ станогунда даярдоого кеткен $b_{ij}, i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,k$ чыгымдары белгилүү.

Продукцияларды өндүрүүгө кеткен суммардык чыгым минималдуу боло тургандай станоктордун иш планын түзгүлө.

◊ Маселенин экономика-математикалык моделин түзөлү.

$x_{ij}, i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,k$ аркылуу S_i станогу менен P_j продукциясын даярдоого кеткен убакытты белгилейли.

Ар бир станоктун иштөө убактысы берилген T убактысынан ашпоосунан

$$\begin{cases} x_{11}+x_{22}+...+x_{1k} \le T, \\ x_{21}+x_{22}+...+x_{2k} \le T, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1}+x_{m2}+...+x_{mk} \le T \end{cases} \tag{2.13}$$

барабарсыздыктар системасы алынат.

Берилген өлчөмдөгү өндүрүүнү аткаруу шартынан төмөнкү системага ээ болобуз:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+...+a_{m1}x_{m1}=n_1, \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+...+a_{m2}x_{m2}=n_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1k}x_{1k1}+a_{2k}x_{2k}+...+a_{mk}x_{mk}=n_k. \end{cases} \tag{2.14}$$

Мындан сырткары өзгөрүлмөлөр

$$x_{ij} \ge 0,\ \ i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,k. \tag{2.15}$$

шартын канааттандыруусу керек.

Продукцияны өндүрүүгө кеткен суммардык чыгым

$$F = b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+...+b_{mk}x_{mk}. \tag{2.16}$$

Коюлган маселенин экономика-математикалык модели: (2.16)- функция минималдык мааниге ээ боло тургандай (2.13)-, (2.14) -системаларын жана (2.15)-шартты канааттандыруучу $X=(x_{11},x_{12},..., x_{mk})$ планын тапкыла. ◊

2.2. Сызыктуу программалоо маселесинин жалпы коюлушу

n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелердин жана барабарсыздыктардын

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.17)$$

системасы жана

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (2.18)$$

сызыктуу функциясы берилсин.

(2.17)- системанын

$$x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,l,\ l \le n \quad (2.19)$$

шартын канааттандыруучу жана (2.18)-сызыктуу функция оптималдык мааниге ээ боло тургандай $X = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ чечимин табуу талап кылынат. Мындай маселелер *сызыктуу программалоо* (СП) маселелери деп аталышат.

(2.17)-системаны *чектөөлөр системасы*, ал эми $F(x)$ функциясы *максаттуу функция* деп аталат.

СП маселесин кыскача жалпы формада

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1,2,\ldots,k, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = k+1, k+2,\ldots,m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,l,\ l \le n$$

чектөөлөрүндө

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \text{ (же min)}$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

(2.17)-системанын (2.19)-шартты канааттандыруучу чечими СП маселесинин *оптималдык чечими* деп аталат, эгерде бул чечимде (2.18)-максаттуу функция экстремалдык (максималдык же минималдык) мааниге ээ болсо. Оптималдык чечимди $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ түрүндө белгилейбиз.

«Чечим» жана «план» терминдери синонимдер болуп саналышат. Бирок, көбүнчө маселенин математикалык чечими жөнүндө сөз жүргөндө «чечим» термини, ал эми экономикалык мааниси жөнүндө сөз жүргөндө «план» сөзү колдонулат.

$x_j, j = 1,2,...,n$ өзгөрүлмөлөрү терс эмес болсо жана (2.17)-система теңдемелерден гана турса, анда СП маселеси *каноникалык формада*, ал эми барабарсыздыктардан гана турса, анда *стандарттык формада* деп аталат.

2.1-пунктта каралган 1-, 2-мисалдар стандарттык, ал эми 3-мисал жалпы формадагы маселелер болуп саналышат.

Каалагандай СП маселесин каноникалык, стандарттык же жалпы маселеге келтирүүгө болот.

Барабарсыздыктарды теңдемелер менен алмаштыруу.

n белгисиздүү

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b \tag{2.20}$$

барабарсыздыгын карайлы. (2.20)-барабарсыздыкты барабардыкка келтирүү үчүн анын сол жагына кандайдыр бир терс эмес

$$x_{n+1} \ge 0 \tag{2.21}$$

чоңдугун кошуу керек.

Натыйжада $n+1$ белгисиздүү

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b \tag{2.22}$$

сызыктуу теңдемени алабыз.

Теорема. (2.20)-барабарсыздыктын ар бир $X(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ чечимине (2.22)-теңдеменин жана (2.21)-барабарсыздыктын жалгыз гана $Y(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, \beta_{n+1})$ чечими туура келет жана тескерисинче, (2.22)- теңдеменин жана (2.21)-барабарсыздыктын ар бир Y чечимине (2.20) -барабарсыздыктын жалгыз гана X чечими туура келет.

□ X - (2.20)-барабарсыздыктын чечими болсун. Анда

$$a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n \le b$$

барабарсыздыгы орун алат. Барабарсыздыктын сол жагын оң жагына
өткөрүп, алынган айрыманы β_{n+1} аркылуу белгилейбиз, б.а.

$$\beta_{n+1} = b - (a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n) \ge 0.$$

Мындан $Y(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, \beta_{n+1})$ чечими (2.22)-теңдемени жана (2.21)- барабарсыздыкты канааттандыра тургандыгын алабыз. Чындыгында, $\beta_{n+1} \ge 0$ жана

$$a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n + \\ + [b - (a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n)] = b.$$

Y - (2.22)-теңдемени жана (2.21)-барабарсыздыкты канааттандырсын, б.а.

$$a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = b \text{ жана } \beta_{n+1} \ge 0$$

болсун.

Акыркы барабарсыздыктын сол жагынан β_{n+1} чоңдугун таштап жиберсек,

$$a_1\beta_1 + a_2\,\beta_2 + ... + a_n\beta_n \le b$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Мындан X - (2.20)-барабарсыздыктын чечими экендиги келип чыгат.

Мына ошентип, кошумча же балансатык өзгөрүлмөлөрдүн жардамында СПнын стандарттык маселеси каноникалык маселеге келтирет. □

Мисалы, ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселеге x_{n+i}, $i = 1,2,...,m$ кошумча өзгөрүлмөлөрүн киргизүүдөн

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n,n+1,...,n+m$$

чектөөлөрүндө

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + ... + 0 \cdot x_{n+m} \to \max$$

каноникалык маселеси алынат.

Мында $x_{n+i}, i = 1,2,...,m$ баланстык өзгөрүлмөлөрүнүн сызыктуу функциядагы коэффициенттери $c_{n+i} = 0$ болот.

Эскертүү. Каралган мисалда бардык барабарсыздыктар "≤" түрүндө болгондуктан, баланстык өзгөрүлмөлөр «+» белгиси менен кошулду. Эгерде барабарсыздыктар "≥" түрүндө болсо, «-» белгиси менен кошулат.

Көнүгүүлөр

2.1-2.4-маселелердин экономика-математикалык моделин түзгүлө.

2.1. Ишкана *A* жана *B* түрдөгү буюмду өндүрүү үчүн сырьенун үч түрүн пайдаланат. Керектүү маалыматтар төмөнкү таблицада келтирилген.

Сырьенун түрү	Сырьенун жалпы көлөмү, кг.	Буюмдун бирдигин даярдоодо сырьенун сарпталуу нормасы, кг.	
		A	*B*
I II III	300 120 252	12 4 3	4 4 12
Буюмдун бирдигин сатуудан түшкөн пайда, а.б.		30	40

B буюмун өндүрүү *A* дан кем болбой тургандай жана аларды сатуудан түшкөн пайда максималдуу боло тургандай продукцияларды өндүрүүнүн планын түзгүлө.

2.2. Фермадагы жандыктарды тоюндуруунун рациону I жана II тоюттарынан турат. I тоюттун 1 килограммынын баасы 80 а.б.

жана курамы 1 бирдик май, 2 бирдик белок, 1 бирдик углевод жана 2 бирдик нитраттан турат. Ал эми II тоюттун 1 килограммынын баасы 10 а.б. жана курамы 3 бирдик май, 1 бирдик белок, 8 бирдик углевод жана 4 бирдик нитраттан турат.

Курамында май 6 бирдиктен, белок 9 бирдиктен, углевод 8 бирдиктен кем эмес жана нитрат 16 бирдиктен көп эмес боло тургандай эң арзан рационду түзгүлө.

2.3. Автоматтык түрдө иштөөчү эки линияда үч типтеги аппарат өндүрүлөт. Маселенин башка шарттары таблицада келтирилген.

Аппараттын тиби	Линиялардын эмгек өндүрүмдүүлүгү, сут.		Линияны иштетүүгө кеткен чыгымдар, суткада даана		План, даана
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Планды аткаруу мөөнөтү 10 суткадан кечикпегидей жана чыгымдар минималдуу боло тургандай автоматтардын иш планын түзгүлө.

2.4. Ар бири 5 метрдик 20 устунду 2 м. жана 3 м. бөлүктөргө, ар бир өлчөмдөгү бөлүктөрдөн бирдей санда келип чыга тургандай бөлүү керек.

Бардык устундар бөлүктөнө тургандай жана комплекттердин саны (ар бир комплектке бирден ар бир өлчөмдөгү бөлүктөр кирет) максималдуу боло тургандай араалоонун планын түзгүлө.

III глава. СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАНЫН ЖАНА ТОМПОК КӨПТҮКТӨР ГЕОМЕТРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

3.1. n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелер системасы

n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелердин

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

системасы берилсин.

СП маселелеринде системанын $A = (a_{ij})$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ матрицасынын рангы r өзгөрүлмөлөрүнөн санынан кичине, б.а. $r < n$ болгон учур кызыгууну туудурат. (3.1)-системанын бардык m теңдемелери сызыктуу көз каранды эмес, б.а $r = m$ жана тиешелүү түрдө $m < n$ деп божомолдойбуз.

n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелер $(m < n)$ системасынын каалагандай m өзгөрүлмөсү *негизги* (*базистик*) деп аталышат, эгерде бул өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринен түзүлгөн матрицанын аныктагычы нөлдөн айрымалуу болсо. Калган $n - m$ өзгөрүлмөлөр *негизги эмес* деп аталышат.

n өзгөрүлмөлөрдүн каалагандай жыйыны негизги болуусу мүмкүн. Негизги өзгөрүлмөлөрдүн жыйындыларынын максималдык мүмкүн болгон саны n элементтен m боюнча топтоштуруунун C_n^m санына барабар.

1-мисал. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$ системасындагы негизги өзгөрүлмөлөрдүн бардык мүмкүн болгон жыйындыларын тапкыла.

◊ Негизги өзгөрүлмөлөрдүн жыйындыларынын жалпы саны $C_4^2 = 4 \cdot 3 / 2 = 6$ дан чоң болбойт, б.а. негизги өзгөрүлмөлөрдүн мүмкүн болгон жыйындары: x_1, x_2 ; x_1, x_3 ; x_1, x_4 ; x_2, x_3 ; x_2, x_4 ; x_3, x_4 .

x_1, x_2 өзгөрүлмөлөрүнүн коэффициенттеринен түзүлгөн матрицанын аныктагычы $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1)(-1) = 0$ болгондуктан, бул өзгөрүлмөлөрдү негизги катары алууга болбойт. Ал эми x_1, x_3 өзгөрүлмөлөрү үчүн аныктагычтын мааниси $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2(-1) = 3 \neq 0$. Демек, x_1, x_3 өзгөрүлмөлөрүн негизги катары алууга болот. Ушул сыяктуу эле x_2, x_3; x_3, x_4 жыйындарын негизги катары алууга боло тургандыгына, ал эми x_1, x_4; x_2, x_4 жыйындарын негизги катары алууга болбой тургандыгына ээ болобуз. ◊

(3.1)-системаны $m < n$ болгон учурда чечүү үчүн төмөнкү теорема колдонулат.

3.1-теорема. Эгерде n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелер системасынын өзгөрүлмөлөрүнүн коэффициенттеринин матрицасынын рангы m ге барабар, б.а. негизги өзгөрүлмөлөрдүн жок дегенде бир жыйыны жашаса, анда система анык эмес болот жана негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн маанилеринин каалагандай жыйынынын ар бирине системанын бир чечими туура келет.

□ $x_1, x_2, ..., x_m$- негизги өзгөрүлмөлөр болушсун (эгерде андай болбосо, тиешелүү өзгөрүлмөлөрдүн номерлерин өзгөртүүгө болот), б.а. матрицанын аныктагычы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(3.1)-системанын теңдемелеринин сол жагында $x_1, x_2, ..., x_m$ өзгөрүлмөлүү мүчөлөрүн калтырып, ал эми $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ өзгөрүлмөлүү мүчөлөрүн оң жакка өткөрүп,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mm}x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - ... - a_{mn}x_n \end{cases}$$

системасына ээ болобуз.

Негизги эмес $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ өзгөрүлмөлөрүнө эрктүү маанилерди берүү менен жаңы $b_1', b_2', ..., b_m'$ бош мүчөлүү жаңы системаны алабыз. Мындай системалар бир эле $|A| \neq 0$ аныктагычына ээ болушат. □

2-мисал. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$

теңдемелер системасын чыгаргыла.

◊ 1-мисалда өзгөрүлмөлөрдүн x_1, x_3; x_2, x_3; x_3, x_4 жыйындарын негизги катары алууга мүмкүн экендигин караганбыз. Негизги өзгөрүлмөлөр катары x_1, x_3 өзгөрүлмөлөрүн алабыз. x_2, x_4 өзгөрүлмөлөрүн негизги эмес деп алабыз жана системанын теңдемелеринен аларды оң жактарына алып өтөбүз. Натыйжада

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 + x_2 + x_4, \\ -x_1 + x_3 = 7 - x_2 - x_4 \end{cases}$$

системасына ээ болобуз. Системаны чыгарып $x_1 = -4 + x_2 + x_4;\ x_3 = 3$ чечимин алабыз. Негизги эмес x_2, x_4 өзгөрүлмөлөрүнө түрдүү эрктүү маанилерди берүү менен системанын чексиз көп чечимин алабыз. Мисалы, $x_2 = c_1, x_4 = c_2$ маанилерин берсек, $(x_1 = -4 + c_1 + c_2; x_2 = c_1;\ x_3 = 3; x_4 = c_2)$ чечимин алабыз. ◊

(3.1)-системанын $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ чечими *мүмкүн болгон чечим* деп аталат, эгерде анын бардык компоненттери терс эмес болсо.

n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелер системасынын *базистик чечими* деп, бардык $n - m$ негизги эмес өзгөрүлмөсү нөлгө барабар чечими аталат.

Мүмкүн болгон базистик чечим *таяныч чечим* деп аталат.

Жок дегенде бир негизги өзгөрүлмөсү нөлгө барабар базистик чечим *кубулуучу* деп аталат.

3-мисал. 1-мисалдагы системанын бардык базистик чечимдерин тапкыла.

◊ 1-мисалда негизги өзгөрүлмөлөрдүн жыйыны үчөө экендигин көрсөткөнбүз.

Негизги өзгөрүлмөлөр катары x_1, x_3 лерди, негизги эмес катары x_2, x_4 төрдү алып, биринчи базистик чечимди алабыз.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөрдү нөлгө барабарлап, б.а. $x_3 = x_4 = 0$ деп алып,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_3 = 7 \end{cases}$$

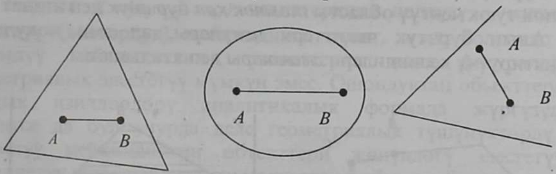
теңдемелер системасына ээ болобуз. Мындан $x_1 = -4; x_3 = 3$. Демек, $X_1 = (-4;0;3;0)$ базистик чечим болот.

Эгерде негизги өзгөрүлмөлөр катары x_2, x_3 төрдү алып, негизги эмес өзгөрүлмөлөрдү нөлгө $x_1 = x_4 = 0$ барабарласак, $X_2 = (0;-4;3;0)$ базистик чечимин алабыз. Ушул сыяктуу эле x_3, x_4 өзгөрүлмөлөрү үчүн $X_3 = (0;0;3;4)$ базистик чечими алынат. Акыркы чечим гана таяныч чечим болот. Ал эми биринчи эки чечим таяныч чечимдер боло алышпайт. Анткени аларда терс компоненттер катышып жатат.◊

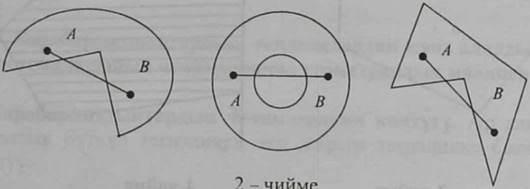
3.2. Чекиттердин томпок көптүгү

Каалагандай эки чекити менен бирдикте, аларды бириктирүүчү кесидини да толугу менен камтуучу чекиттердин көптүгүн *томпок көптүк* деп атайбыз.

Жалпак томпок (1-чийме) жана томпок эмес (2-чийме) фигураларга төмөндө мисалдар келтирилген.



1-чийме



2 – чийме

3.2-теорема. Томпок областтардын кесилишүүсү да томпок область болот.

A чекити томпок областын *ички чекити* деп аталат, эгерде бул чекиттин жетишердик кичине аймагында бул областка тиешелүү болгон гана чекиттер жатса.

B чекити томпок областын *чек аралык чекити* деп аталат, эгерде бул чекиттин жетишердик кичине аймагында бул областка таандык болгон да, болбогон да чекиттер жатса (3-чийме).

C чекити томпок областын *бурчтук чекити* деп аталат, эгерде чек аралык чекити болсо жана бул областын каалагандай эки чекитин бириктирүүчү кесиндинин ички чекити болбосо (3-чийме).

Эгерде область өзүнүн бардык чек аралык чекиттерин камтыса, анда ал *туюк область* деп аталат.

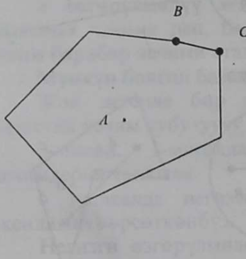
$|x - x_0| < R$ барабарсыздыгын каанатандырган $x \in R^n$ чекиттердин көптүгүн радиусу R жана борбору x_0 чекити болгон *ачык шар* деп айтабыз.

Бул шар $U_R(x_0) = \{x \in R^n, |x - x_0| < R\}$ көрүнүшүндө белгиленет.

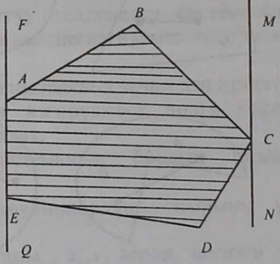
Эгерде берилген көптүктү камтуучу шар жашаса, анда R^n деги бул көптүк *чектүү* деп аталат.

Бурчтук чекиттеринин саны чектүү болгон тегиздиктин томпок туюк чектүү областы *томпок көп бурчтук* деп аталат.

Анын бурчтук чекиттери *чокулары*, ал эми чокуларын бириктирүүчү кесиндилери *жактары* деп аталышат.



3-чийме



4-чийме

Эгерде томпок көп бурчтук кандайдыр бир түздүн бир жагында жатса жана аны менен жок дегенде бир жалпы чекитке ээ болсо, анда мындай түз томпок көп бурчтуктун *таяныч түзү* деп аталат.

4-чиймедеги MN жана FQ түздөрү $ABCDE$ томпок көп бурчтугунун таяныч түздөрү болушат.

Бурчтук чекиттеринин саны чектүү болгон мейкиндиктеги (тегиздиктеги) томпок туюк чектүү область *томпок көп грандык* (*көп бурчтук*) деп аталат.

Бурчтук чекиттеринин саны чектүү болгон мейкиндиктеги (тегиздиктеги) томпок туюк чектелбеген область томпок *көп грандуу* (*көп бурчтуу*) *область* деп аталат.

Буга чейин тегиздиктеги жана мейкиндиктеги чекиттердин томпок көптүгү каралды. Аналитикалык түрдө бул чекиттер сандардын иреттештирилген (x_1,x_2) түгөйү жана (x_1,x_2,x_3) үчтүгү менен сүрөттөлүшөт. n сандын иреттештирилген $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ жыйындысын чекит (же вектор) деп алуу менен чекит түшүнүгүн жалпылаштырууга болот. Мында $x_1,x_2,...,x_n$ сандары чекиттин (вектордун) *координаталары* деп аталышат. Мындай жалпылоо мааниге ээ. Анткени, кандайдыр бир экономикалык объектти мүнөздө үчүн эки-үч саң аздык кылат. Ошондуктан n, $n>3$ санды алуу зарыл.

Бардык $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ чекиттеринин көптүгү n-ченемдүү чекиттүү (вектордук) мейкиндикти түзөт. $n>3$ болгондо n-ченемдүү мейкиндиктин чекиттерин жана фигураларын геометриялык элестетүү мүмкүн эмес. Ошондуктан объекттердин бардык изилдөөлөрү аналитикалык формада жүргүзүлөт. Ошентсе да бул учурда деле геометриялык түшүнүктөрдү n-ченемдүү мейкиндиктин объекттери жөнүндөгү элестетүүнү жеңилдетүү үчүн пайдалануу максатка ылайыктуу болот.

3.3. Барабарсыздыктардын, теңдемелердин жана алардын системаларынын чечимдеринин геометриялык мааниси

Барабарсыздыктардын чечимдеринин көптүгү. Ар кандай түз сызык бүткүл тегиздикти эки жарым тегиздикке бөлөөрү белгилүү.

3.3-теорема.

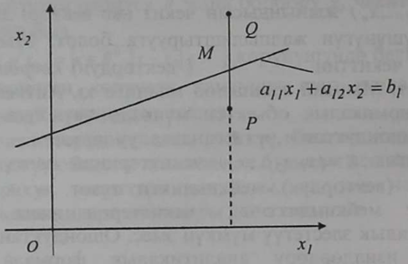
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \qquad (3.2)$$

эки өзгөрүлмөлүү барабарсыздыгынын чечимдеринин көптүгү $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ түзүн камтуучу жарым тегиздиктердин бири, ал эми экинчиси ушул эле түз менен

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1 \qquad (3.3)$$

барабарсыздыгынын чечимдеринин көптүгү болот.

□ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ түзүндө жатуучу M чекитинин каалагандай x_1 абциссасы үчүн анын ординатасы $a_{12} \ne 0$ болгондо, $x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$ болот, б.а. $M\left(x_1; -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}\right)$.



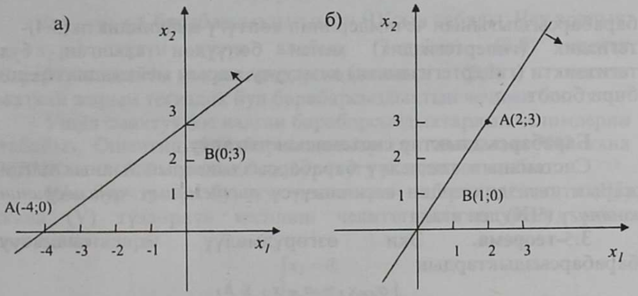
5 - чийме

M чекити аркылуу Ox_2 огуна параллель түз жүргүзөбүз. M чекитинен төмөн жана жогору жайланышкан түздүн каалагандай P жана Q чекиттери, б.а. жарым тегиздиктери үчүн $x_{2Q} \ge x_{2M}$ жана $x_{2P} \le x_{2Q}$ же $x_2 \ge -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$ жана $x_2 \le -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$ барабарсыздыктары аткарылат. $a_{12} > 0$ болгондо акыркы барабарсыздыктардан тиешелүү түрдө $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$ жана $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ барабарсыздыктары алынат, б.а жогорку жарым тегиздиктин бардык чекиттери (3.2)-барабарсыздыкты, ал эми төмөнкү жарым тегиздиктин чекиттери (3.3)-барабарсыздыкты каанаттандырышат. $a_{12} < 0$ болгон учурда жогорку жарым тегиздиктин чекиттери (3.3)-барабарсыздыкты, төмөнкү жарым тегиздиктин чекиттери (3.2)-барабарсыздыкты канаattандырышат. □

1-мисал. а) $3x_1 - 4x_2 + 12 \leq 0$; б) $3x_1 - 2x_2 \geq 0$ барабарсыздыктарынын чечимдеринин көптүгү түзгүлө.

◊ а) $3x_1 - 4x_2 = -12$ түзүн $A(-4;0)$ жана $B(0;3)$ координаттык октор менен кесилишүү чекиттеринин жардамында түзүп алабыз.

Изделүүчү жарым тегиздик берилген (чек аралык) түздүн кайсы жагында жатаарын аныктоо үчүн бул түздө жатпаган тегиздиктин каалагандай чекитин алып, анын координаталарын барабарсыздыкка коюу керек. Мындай чекитти *текшерүүчү чекит* деп атайбыз. Эгерде барабарсыздык аткарылса, анда изделүүчү жарым тегиздик бул чекит жаткан жарым тегиздик менен дал келет. Тескери учурда, бул чекит жатпаган жарым тегиздик менен дал келет.



6-чийме

Текшерүүчү чекит катары координата башталышын алуу ыңгайлуу. (0,0) чекити барабарсыздыкты канааттандырбагандыктан, бул чекит жатпаган жогорку жарым тегиздик барабарсыздыктын чечими болот.

б) $3x_1 - 2x_2 = 0$ түзүн $O(0;0)$ жана $A(2;3)$ чекиттеринин жардамында түзөбүз. Мында текшерүүчү чекит үчүн координата башталышын алууга болбойт, себеби ал берилген түздө жатат. $B(1;0)$ чекитин текшерүүчү катары алабыз. Анын координаталары барабарсыздыкты канааттандыргандыктан, б.а. $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \geq 0$, берилген барабарсыздыктын чечимдеринин көптүгү төмөнкү (оң жаккы) жарым тегиздик болот. ◊

Эскертүү. Чиймелерде барабарсыздыктарды канааттандыруучу жарым тегиздиктер стрелкалар менен көрсөтүлгөн.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (3.4)$$

теңдемесин канааттандырган чекиттердин көптүгү $n=3$ болгондо, тегиздикти, ал эми $n>3$ болгон учурда n-ченемдүү мейкиндиктеги гипертегиздикти бере тургандыгын эске алсак, 3.3-теореманы үч жана андан көп өзгөрүлмөлүү учурга жалпылаштырууга болот.

3.4-теорема. n өзгөрүлмөлүү сызыктуу

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

барабарсыздыгынын чечимдеринин көптүгү мейкиндикти (3.4)-тегиздик (гипертегиздик) менен бөлүүдөн алынган, бул тегиздикти (гипертегиздикти) камтуучу жарым мейкиндиктердин бири болот.

Барабарсыздыктар системасын чыгаруу.

Системанын тиешелүү барабарсыздыктарынан аныкталган жарым тегиздиктердин кесилишүүсү *системанын чечимдеринин көптүгү* (ЧК) деп аталат.

3.5-теорема. Эки өзгөрүлмөлүү m сызыктуу барабарсыздыктардын

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

системасынын чечимдеринин көптүгү томпок көп бурчтук (томпок көп бурчтуу область) болот.

□ Ар бир барабарсыздык 3.3-теореманын негизинде чекиттердин томпок көптүгү болгон кандайдыр бир жарым тегиздикти аныктайт. Сызыктуу барабарсыздыктардын биргелешкен систёмасынын чечимдеринин көптүгү болуп, бардык барабарсыздыктардын чечимдеринин жарым тегиздиктерине, б.а. алардын кесилишүүсүнө таандык болгон чекиттер саналышат. 3.2-теоремадан бул көптүк чектүү сандагы бурчтук чекиттерге ээ болгон томпок көптүк, б.а. томпок көп бурчтук (томпок көп бурчтуу область) экендиги келип чыгат. □

Өзгөрүлмөлөрдүн терс эмес болуу шартын канаатандыруучу системанын чечимдеринин көптүгү *мүмкүн болгон чечимдердин көптүгү* (МБЧК) деп аталат.

2-мисал. Төмөнкү системанын ЧК жана МБЧКсын, МБЧКсынын бурчтук чекиттерин тапкыла:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, (I) \\ 2x_1 + x_2 \le 9, (II) \\ x_1 + 2x_2 \le 7, (III) \\ x_1, x_2 \ge 0. \ (IV, V) \end{cases}$$

◊ $x_1 + x_2 \le 5$ барабарсыздыгынын ЧКсын табалы. Чек аралык $x_1 + x_2 = 5$ түзүн түзүп алабыз (7-чийме). (0,0) чекити барабарсыздыкты канааттандыргандыктан, (0,0) чекити жаткан жарым тегиздик бул барабарсыздыктын чечими болот.

Ушул сыяктуу эле калган барабарсыздыктардын чечимдерин табабыз. Ошентип, барабарсыздыктар системасынын ЧК жана МБЧКсы $OABCD$ томпок беш бурчтугу экендигин алабыз.

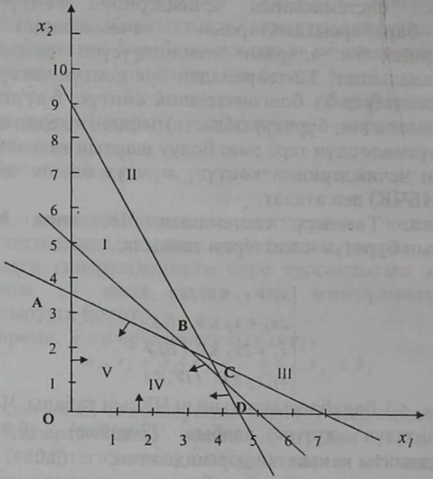
Көп бурчтуктун бурчтук чекиттерин табалы. A чекити (III) жана (V) түздөрдүн кесилиш чекити болгондуктан, анын координаталары

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

системасын канааттандырат. Системаны чыгарып, $A(0;3,5)$ экендигине ээ болобуз. Ал эми B чекити (I) жана (III) түздөрдүн кесилиш чекити. Андыктан координаталарын

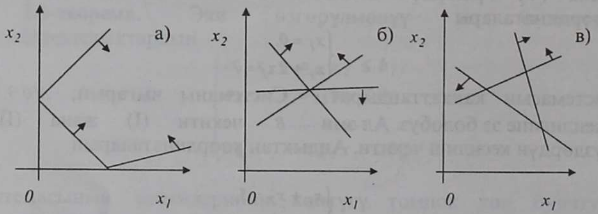
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

системасынан аныктайбыз. Системаны чыгарып, $B(3;2)$ ээ болобуз. Ушул сыяктуу эле $C(4;1), D(4,5;0)$ экендиктерин аныктайбыз. ◊



7 - чийме

Барабарсыздыктар системасынын чечимдеринин көптүгү система биргелешкен болгондо көп бурчтуу томпок область (8,а - чийме), бир чекит (8,б -чийме) болуусу да мүмкүн, ал эми биргелешпеген учурда куру көптүк болот (8,в-чийме).



8 -чийме

3.6-теорема. n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу барабарсыздыктар системасынын ЧКсы n-ченемдүү мейкиндикте томпок көп грандык (томпок көп грандуу область) болот.

n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелер системасынын МБЧКсы.

3.7-теорема. n өзгөрүлмөлүү m сызыктуу теңдемелер $(m<n)$ системасынын МБЧКсы n-ченемдүү мейкиндикте томпок көп грандык (томпок көп грандуу область) болот.

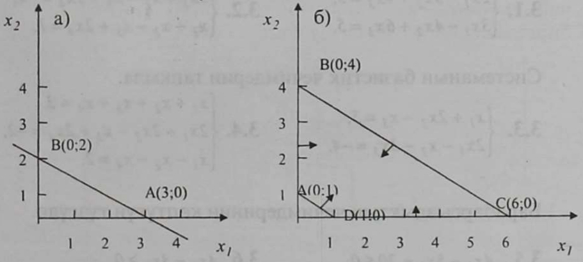
3-мисал. а) $2x_1+3x_2=6$ теңдемесинин; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=12,\\ x_1+x_2-x_4=1\end{cases}$ системасынын МБЧКсын тапкыла.

◊ **а)** Берилген теңдеменин ЧКсы $2x_1+3x_2=6$ түзү, МБЧКсы AB кесиндиси болот (9, а-чийме). AB кесиндисин $A(3;0)$ жана $B(0;2)$ бурчтук чекиттүү томпок көп бурчтуктун жекече учуру катары кароого болот.

б) $n=4$ белгисиздүү теңдемелер системасын ЧКсын түздөн-түз түзүүгө мүмкүн эмес. Бул учурда (өзгөрүлмөлөрдүн саны менен теңдемелердин санынын айрымасы $n-m=2$ ге барабар) x_3,x_4 өзгөрүлмөлөрүн негизги, x_1,x_2 өзгөрүлмөлөрүн негизги эмес деп алабыз. Системанын ЧКсынын ордуна негизги эмес өзгөрүлмөлөрүнүн маанилеринин көптүгүн аныктайбыз.

Ушул максатта негизги өзгөрүлмөлөрдү негизги эместер аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases}x_3=12-2x_1-3x_2,\\ x_4=-1+x_1+x_2.\end{cases}$$



9-чийме

Системанын МБЧКсын түзүү талап кылынгандыктан, б.а. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ шартынан

$$\begin{cases} 12 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ -1 + x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

барабарсыздыктар системасына ээ болобуз. Бул системанын МБЧКсы $ABCD$ төрт бурчтугу болот.

Берилген мисалда графиктик түзүү бардык өзгөрүлмөлөрдүн мейкиндигинде эмес, x_1, x_2 негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн тегиздигинде жүргүзүлдү. Бирок, x_1, x_2 негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн каалагандай маанилеринин түгөйүнө x_3, x_4 өзгөрүлмөлөрүнүн анык бир мааниси туура келгендиктен, $ABCD$ төрт бурчтугунун ар бир чекитине төрт ченемдүү мейкиндиктеги томпок көп грандык болгон теңдемелер системасынын чечимдеринин көптүгүнүн бир гана чекити тиешелеш болот. ◊

Сызыктуу теңдемелер системасынын мүмкүн болгон базистик чечимдери менен МБЧКсынын бурчтук чекиттеринин ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орун алат.

Көнүгүүлөр

Теңдемелер системасын чыгаргыла.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

Системанын базистик чечимдерин тапкыла.

3.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$

Барабарсыздыктын чечимдеринин көптүгүн түзгүлө.

3.5. $4x_1 - 5x_2 + 20 \leq 0.$ **3.6.** $4x_1 - 3x_2 \geq 0.$

Барабарсыздыктар системасынын чечимдеринин көптүгүн түзгүлө жана анын бурчтук чекиттерин аныктагыла.

3.7. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 15 \ge 0, \\ 0 \le x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 - 17 \le 0, \\ 0 \le x_1 \le 11. \end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Теңдемелердин чечимдеринин көптүгүн түзгүлө.

3.9. $3x_1 + 5x_2 = 15.$ **3.10.** $2x_1 - 3x_2 = 0.$

IV глава. СЫЗЫКТУУ ПРОГРАММАЛОО МЕТОДДОРУНУН ТЕОРИЯЛЫК НЕГИЗДЕРИ

4.1. n-ченемдүү мейкиндиктеги томпок көптүктөр

3.2 - пунктта томпок көптүктү каалагандай эки чекити менен бирдикте, аларды бириктирүүчү кесиндини да камтуучу көптүк катары аныктаганбыз. Бирок n өзгөрүлмөлүү учурда n- ченемдүү мейкиндикте «кесинди» деп эмнени түшүнүү керектиги айкын эмес. Ошондуктан, бул түшүнүккө аналитикалык аныктама берүү зарыл.

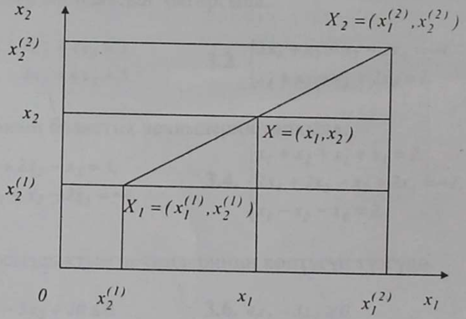
$n = 2$ учурдан баштайбыз. $X_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ жана $X_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ - Ox_1x_2 тегиздигинин чекиттери, ал эми $X(x_1, x_2)$ - X_1X_2 кесиндисинин каалагандай чекити болсун. XX_2 жана X_1X_2 кесиндилеринин узундуктарынын катышы α - $0 \le \alpha \le 1$ шартын канааттандыруусу белгилүү. Бул катышты чекиттердин координаталары аркылуу жазып алабыз:

$$\alpha = \frac{x_1^{(2)} - x_1}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{x_2^{(2)} - x_2}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}}.$$

Мындан

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1^{(1)} + (1-\alpha)x_1^{(2)}, \\ x_2 = \alpha x_2^{(1)} + (1-\alpha)x_2^{(2)}, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$0 \le \alpha \le 1. \tag{4.2}$$



1-чийме

$\alpha_1=\alpha$ жана $\alpha_2=1-\alpha$ белгилөөлөрүн кийирсек, (4.1)- жана (4.2) -шарттар

$$\begin{cases} x_1=\alpha_1 x_1^{(1)}+\alpha_2 x_1^{(2)}, \\ x_2=\alpha_1 x_2^{(1)}+\alpha_2 x_2^{(2)}, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1+\alpha_2=1 \tag{4.4}$$

көрүнүшүнө келет.

(4.3)-барабардыкты

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2 \tag{4.5}$$

түрүндө жазууга болот.

Ошентип, X_1X_2 кесиндисин (4.5)- жана (4.4)-шарттарды канааттандыруучу чекиттердин (векторлордун) көптүгү катары аныктоого болот.

Эгерде X_1 жана X_2 - n - ченемдүү мейкиндиктин чекиттери: $X_1(x_1^{(1)},x_2^{(1)},...,x_n^{(1)})$ жана $X_2(x_1^{(2)},x_2^{(2)},...,x_n^{(2)})$ катары карасак, n - ченемдүү мейкиндикте кесинди түшүнүгүн (4.5)- жана (4.4) - шарттарын канааттандыруучу чекиттердин көптүгү катары кароого болот.

Бир нече чекиттер үчүн кесинди түшүнүгүнүн жалпыланышы болуп, алардын томпок сызыктуу комбинациясы саналат.

X чекити $X_1, X_2,..., X_n$ чекиттеринин *сызыктуу комбинациясы* деп аталат, эгерде

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+...+\alpha_n X_n,$$

$$\alpha_j \ge 0,\ j=1,2,...,n, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$$

шарттары орун алса.

Мисалы, $(1/6)X_1+(1/2)X_2+(1/3)X_3$ туюнтмасы X_1, X_2, X_3 чекиттеринин томпок сызыктуу комбинациясы, ал эми $(1/3)X_1+(1/2)X_2+(1/3)X_3$ же $(1/3)X_1-(1/2)X_2+$ $+(7/6)X_3$ туюнтмалары ушул эле чекиттердин сызыктуу комбинациясы болот, бирок томпок эмес. Анткени, биринчиси үчүн $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ne 1$, ал эми экинчисинде $\alpha_2=-\frac{1}{2}<0$.

Жекече учурда $n=2$ болгондо, эки чекиттин томпок сызыктуу комбинациясы болуп аларды бириктирүүчү кесинди саналат. Ошондуктан, чекиттердин көптүгү томпок болот, эгерде каалагандай эки чекит менен бирдикте алардын каалагандай томпок сызыктуу комбинациясын да камтыса.

4.1-теорема. Томпок n - ченемдүү көп грандык өзүнүн бурчтук чекиттеринин томпок сызыктуу комбинациясы болот.

□ Жөнөкөйлүк үчүн $n=2$ деп, ал эми көп грандык үчүн $X_1X_2X_3$ үч бурчтугун (2-чийме) алалы. Үч бурчтуктун каалагандай X чекити аркылуу X_1X_4 кесиндисин жүргүзөбүз. X чекити бул кесиндиде жаткандыктан

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4$$

барабардыгы орун алат. Мында $\alpha_1 \geq 0, \alpha_4 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_4 = 1$.

Ал эми X_4 чекити X_2X_3 кесиндисине таандык болгондуктан, $X_4 = \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$, $\alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ээ болобуз.

X_4тү X тин туюнтмасына койсок, ал анда

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_4 (\alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 \alpha_4 X_2 + \alpha_3 \alpha_4 X_3$$

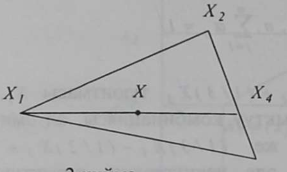
түргө келет.

$t_1 = \alpha_1, t_2 = \alpha_2 \alpha_4, t_3 = \alpha_3 \alpha_4$ белгилөөлөрүнүн жардамында

$$X = t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3,$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

алабыз.

Ошентип, X чекити $X_1X_2X_3$ үч бурчтугунун бурчтук чекиттеринин томпок сызыктуу комбинациясы болот. □



2-чийме

Бул теоремадан томпок көп грандык өзүнүн бурчтук чекиттери менен: кесинди – эки чекит, үч бурчтук - үч чекит, тетраэдр – төрт чекит менен ж.б. аныкталаары келип чыгат. Ошол эле кезекте томпок көп грандуу область өзүнүн бурчтук чекиттери менен бир маанилүү аныкталбайт. Анын каалагандай чекитин бурчтук чекиттеринин томпок сызыктуу комбинациясы түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн эмес.

4.2. СП маселесинин касиеттери

2.2-пунктта СП маселесинин түрдүү формалары каралган жана СПнын каалагандай маселесин жалпы, каноникалык жана стандарттык формада көрсөтүүгө боло тургандыгы айтылган.

СПнын каноникалык маселесин төмөндөгүдөй эки формада да жазууга болот.

Матрицалык формада жазылышы.

$$AX = B, \tag{4.6}$$

$$X \geq 0 \tag{4.7}$$

чектөөлөрүндө

$$F = CX \to \max(\min). \tag{4.8}$$

Мында $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ - жолчо-матрица;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - системанын матрицасы; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - өзгөрүлмөлөрдүн мамыча-матрицасы, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - бош мүчөлөрдүн мамыча-матрицасы.

Вектордук формада жазылышы.

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n = P, \tag{4.9}$$

$$X \geq 0 \tag{4.10}$$

чектөөлөрүндө

$$F = CX \to \max(\min). \tag{4.11}$$

Мында $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; CX - векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү;

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

тиешелүү түрдө өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринен жана бош мүчөлөрдөн турган векторлор. $X \geq 0$ вектордук барабарсыздыгы X векторунун бардык компоненттери терс эмес, б.а. $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ экендигин түшүндүрөт.

4.2-теорема. СП маселесинин чектөөлөр системасынын бардык мүмкүн болгон чечимдеринин көптүгү томпок болот.

□ $X_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ жана $X_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ матрицалык формадагы (4.6)-(4.8)-маселенин мүмкүн болгон чечимдери болсун.

Анда $AX_1 = B$ жана $AX_2 = B$ барабардыктары орун алат. X_1, X_2 чечимдеринин томпок сызыктуу комбинациясын карайлы:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \; \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \; \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

жана анын (4.6)-системанын мүмкүн болгон чекити экендигин көрсөтөлү. Чындыгында

$$AX = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 AX_1 + (1 - \alpha_1) AX_2 = \alpha_1 B + \\ + (1 - \alpha_1) B = B$$

б.а. X чечими (4.6)-системаны канааттандырат жана $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ болгондуктан, $X \geq 0$, б.а. X чечиминин (4.7)-шартты да канааттандырышы келип чыгат. □

Ошентип, СП маселесинин МБЧКсы томпок көптүк, тагыраак айтканда, томпок көп грандык же томпок көп грандуу область болоору далилденди.

4.3-теорема. Эгерде СП маселесинин оптималдык мааниси жашаса, анда сызыктуу функция максималдык мааниге МБЧКнын бурчтук чекиттеринин биринде ээ болот. Эгерде сызыктуу функция максималдык мааниге бирден көп чекитте ээ болсо, анда бул чекиттердин сызыктуу комбинациясы болгон каалагандай чекитте максималдык мааниге ээ болот.

□ МБЧК чектүү болсун деп божомолдойлу. Анын бурчтук чекиттерин $X_1, X_2, \dots, X_p$ аркылуу, ал эми оптималдык чечимди X^* аркылуу белгилейли (3-чийме). МБЧКнын каалагандай X

чекити үчүн $F(X^*) \geq F(X)$ орун алат. Эгерде X^* бурчтук чекит болсо, теореманын биринчи бөлүгү далилденди.

X^* бурчтук чекит болбосун дейли. Анда 4.1-теореманын негизинде X^* чекитин МБЧКнын бурчтук чекиттеринин сызыктуу комбинациясы түрүндө көрсөтүүгө болот, б.а.

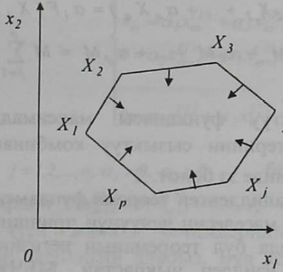
$$X^* = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p ,$$

$$\alpha_j \geq 0 ,\ j = 1,2,\ldots,\ p ,\ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1 .$$

$F(X)$ функциясы сызыктуу болгондуктан,

$$F(X^*) = F(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p) = \alpha_1 F(X_1) + \\ + \alpha_2 F(X_2) + \ldots + \alpha_p F(X_p) \tag{4.12}$$

ажыралышына ээ болобуз.



3-чийме

Бул ажыралыштагы $F(X_j),\ j = 1,2,\ldots,\ p$ маанилеринин ичинен максималдуусун тандап алалы. Ал мааниге $X_k, 1 \leq k \leq p$ чекитинде ээ болсун жана аны M аркылуу белгилейли, б.а. $F(X_k) = M$. (4.12)- ажыралыштагы ар бир кошулуучуну ушул максималдык маани менен алмаштыралы. Анда

$$F(X^*) \leq \alpha_1 M + \alpha_2 M + \ldots + \alpha_p M = M \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = M$$

барабардыгына ээ болобуз. Божомолдоо боюнча X^* - оптималдык чечим, андыктан $F(X^*) \geq F(X_k) = M$ алабыз. Бирок

$F(X^{*}) \leq M$ экендигин далилдедик. Демек, $F(X^{*}) = F(X_k) = M$ орун алат жана X_k бурчтук чекит болот.

Теореманын экинчи бөлүгүн далилдөө үчүн $F(X)$ функциясы максималдык мааниге бир нече чекитте мисалы, $X_1, X_2, ..., X_q$, $1 \leq q \leq p$ чекиттеринде ээ болсун. Анда $F(X_1) = F(X_2) = ... = F(X_q) = M$ болот.

X - бул бурчтук чекиттердин томпок сызыктуу комбинациясы болсун, б.а.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_q X_q,$$

$$\alpha_j \geq 0, j = 1,2,..., q, \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = 1.$$

$F(X)$ функциясынын сызыктуулугун эске алсак,

$$F(X) = F(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_q X_q) = \alpha_1 F(X_1) + \alpha_2 F(X_2) +$$

$$+ ... + \alpha_q F(X_q) = \alpha_1 M + \alpha_2 M + ... + \alpha_p M = M \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = M,$$

б.а. $F(X)$ сызыктуу функциясы максималдык мааниге $X_1, X_2, ..., X_q$ чекиттеринин сызыктуу комбинациясы болгон каалагандай X чекитинде ээ болот. ❐

Эскертүү. Далилденген теорема фундаменталдык болуп саналат, анткени СП маселесин чечүүнүн принципиалдуу жолун көрсөтөт. Чындыгында бул теореманын негизинде МБЧКнын бардык чекиттерин изилдеп чыкпастан, МБЧКнын бурчтук чекиттерин гана изилдөө жетиштүү болот.

Төмөнкү теорема бурчтук чекиттерди аналитикалык жол менен аныктоого мүмкүндүк берет.

4.4-теорема. СП маселесинин ар бир таяныч чечимине МБЧКнын бурчтук чекити тиешелеш келет жана тескерисинче МБЧКнын ар бир бурчтук чекитине таяныч чечим туура келет.

❏ $X(x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0)$ - маселенин (4.9)-чектөөлөр системасынын биринчи m компоненттери негизги, калган $n-m$ өзгөрүлмөлөрү нөлгө барабар (эгерде андай болбосо, өзгөрүлмөлөрдү кайрадан номерлөө менен жетишүүгө болот) негизги эмес өзгөрүлмөлөр болгон таяныч чечими болсун. X чекити МБЧКнын бурчтук чекити экендигин көрсөтөбүз.

Карама-каршысынан далилдейбиз, б.а. X - бурчтук чекит болбосун. Анда X чекитин бул чекит менен дал келбеген $X_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},...,x_m^{(1)},x_{m+1}^{(1)},...,x_n^{(1)})$ жана $X_2=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},...,x_m^{(2)},x_{m+1}^{(2)},...,x_n^{(2)})$ чекиттерин бириктирүүчү кесиндинин ички чекити катары көрсөтүүгө болот же бул чекиттердин томпок сызыктуу комбинациясы болот, б.а.

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2, \tag{4.13}$$

мында $\alpha_1>0, \alpha_2>0, \alpha_1+\alpha_2=1$. $\alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$, антпесе X чекити X_1 же X_2 чекити менен дал келет.

(4.13)-барабардыкты координаттык формада жазалы:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_1 x_1^{(1)}+\alpha_2 x_1^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m=\alpha_1 x_m^{(1)}+\alpha_2 x_m^{(2)}, \\ 0=\alpha_1 x_{m+1}^{(1)}+\alpha_2 x_{m+1}^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0=\alpha_1 x_n^{(1)}+\alpha_2 x_n^{(2)}. \end{cases}$$

$x_j^{(1)}\geq 0, x_j^{(2)}\geq 0,\ j=1,2,...,n,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2>0$ болгондуктан, $n-m$ барабардыктардан $x_{m+1}^{(1)}=0, x_{m+1}^{(2)}=0,..., x_n^{(1)}=0, x_n^{(2)}=0$, б.а. (4.9) -системанын X_1, X_2 жана X чечимдеринде $n-m$ компоненттери нөлгө барабар экендигин алабыз. Бул компоненттерди негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн маанилери катары эсептөөгө болот. Бирок, негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн маанилери негизги өзгөрүлмөлөрдүн маанилерин бир маанилүү аныктагандыктан, $x_1^{(1)}=x_1^{(2)}=x_1,...,x_m^{(1)}=x_m^{(2)}=x_2$ ээ болобуз. Ошентип, X_1, X_2 жана X чечимдериндеги бардык n компоненттери дал келет. Мындан X_1 жана X_2 чекиттери бир эле чекити берип калат. Демек, X чекити МБЧКнын бурчтук чекити болот.

Тескери ырастоону далилдейбиз. $X(x_1, x_2,..., x_m, 0, 0,..., 0)$ - биринчи m координатасы оң болгон МБЧКнын бурчтук чекити болсун. X - таяныч чечим экендигин көрсөтөлү.

Эгерде $P_1, P_2,..., P_m$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес болушса, анда бул векторлордун компоненттеринен түзүлгөн A

матрицасынын рангы m ге барабар, б.а. $|A| \neq 0$. Мындан $x_1, x_2, ..., x_m$ өзгөрүлмөлөрү негизги жана $X(x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0)$ - мүмкүн болгон базистик же таяныч чечим экендиги келип чыгат, б.а. ырастоо далилденди.

Эми $P_1, P_2, ..., P_m$ векторлору сызыктуу көз каранды болсун дейли. Анда

$$\alpha_1 P_1 + ... + \alpha_m P_m = 0 \tag{4.14}$$

туюнтмасындагы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ коэффициенттеринин жок дегенде бири нөлдөн айрымалуу.

(4.14)-барабардыктын ар бир мүчөсүн $\mu > 0$ санына көбөйтөлү:

$$\mu\alpha_1 P_1 + ... + \mu\alpha_m P_m = 0 . \tag{4.15}$$

МБЧКнын X бурчтук чекитинин координаталарын (4.9)-чектөөлөр системасына коюп, төмөнкүнү алабыз

$$P_1 x_1 + ... + P_m x_m = P . \tag{4.16}$$

(4.16)-барабардыкка (4.15)-барабардыкты мүчөлөп кошуп жана кемитип жиберели:

$$P_1(x_1 + \mu\alpha_1) + ... + P_m(x_m + \mu\alpha_m) = P , \tag{4.17}$$

$$P_1(x_1 - \mu\alpha_1) + ... + P_m(x_m - \mu\alpha_m) = P . \tag{4.18}$$

Алынган (4.17)- жана (4.18)-барабардыктарды (4.16)- менен салыштырып, μ нын каалагандай маанисинде (4.9)-чектөөлөр системасын $X_1(x_1 + \mu\alpha_1, ..., x_m + \mu\alpha_m, 0, 0, ..., 0)$ жана $X_2(x_1 - \mu\alpha_1, ..., x_m - \mu\alpha_m, 0, 0, ..., 0)$ чечимдери канааттандыра тургандыгын аныктайбыз.

$x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n$ болгондуктан, μ чоңдугун X_1 жана X_2 чечимдеринин бардык компоненттери терс эмес болгудай жетишердик кичине тандоого болот. Натыйжада X_1 жана X_2 (4.9)-(4.1)-маселенин түрдүү мүмкүн болгон чечимдери болушат. Мында $\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0)$ экендигин жеңил эле байкоого болот, б.а. X чекити МБЧКда жайланышкан кесиндиде жатат. Демек, X бурчтук чекит эмес. Мындан, $P_1, P_2, ..., P_m$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес жана X - (4.9)-(4.11) маселенин таяныч чечими экендигине ээ болобуз. □

4.2 - , 4.3-теормалардан төмөнкүдөй натыйжалар келип чыгат.

Натыйжа. Эгерде СП маселеси оптималдык мааниге ээ болсо, анда анын чечими жок дегенде бир таяныч чечими менен дал келет.

Ошентип, СП маселесинин оптималдык маанисин чектүү сандагы таяныч чечимдеринен издөө керек.

V глава. СП МАСЕЛЕСИН ЧЕЧҮҮНҮН ГРАФИКТИК МЕТОДУ

Графиктик метод СП маселесинин геометриялык талкууланышына негизделген жана негизинен эки ченемдүү мейкиндиктин маселелерин, үч ченемдүү мейкиндиктин айрым маселелерин чечүү үчүн колдонулат. Анткени үчтөн көп ченемдүү мейкиндиктеги маселенин МБЧКсын түзүү кыйынчылыкка турат.

Эки ченемдүү мейкиндиктеги СП

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{5.2}$$

чектөөлөрүндө

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min \tag{5.3}$$

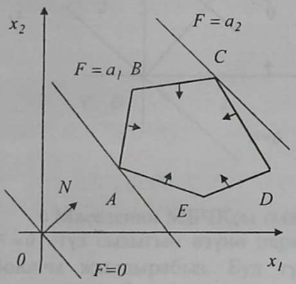
маселеси берилсин.

(5.2)-шартта (5.1) – система биргелешкен жана МБЧКсы чектелген болсун. Жогоруда белгиленгендей (3.3-пункт) (5.1)- жана (5.2)-барабарсыздыктардын ар бири $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1,2,..., m$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ чек аралык түздөр менен чектелген жарым тегиздиктерди аныкташат. (5.3)-сызыктуу функциянын деңгээл сызыктары теңдемелери $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ болгон түз сызыктар болушат. Маселенин чектөөлөр системасынын МБЧКсын жана (5.3)-сызыктуу функциянын $F = 0$ деңгээл сызыгын түзөбүз (1-чийме). Анда каралган СП маселесин төмөнкүдөй талкуулоого болот: МБЧКнын $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ деңгээл сызыгы таяныч түз жана (5.3)-функция минималдык мааниге ээ боло тургандай чекитин аныктоо талап кылынат.

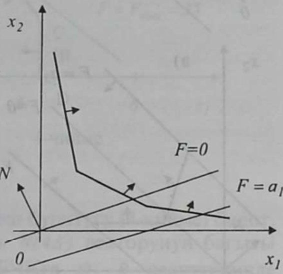
$F = c_1x_1 + c_2x_2$ сызыктуу функциянын мааниси $N = (c_1, c_2)$ векторунун багыты боюнча өсөт. Андыктан $F = 0$ түз сызыгын өзүнө параллель N векторунун багыты боюнча жылдырабыз.

Бул түз сызык МБЧКга A, C чекиттеринде таяныч түз болоору жана функция минималдык мааниге A чекитинде ээ экендиги 1-чиймеден көрүнүп турат. $A=(x_1,x_2)$ чекитинин координаталарын AB жана AE түз сызыктарынын теңдемелеринин системасын чечүү менен аныктайбыз.

Айрым учурларда деңгээл сызык МБЧКнын жактарынын биринде таяныч түз болуп калуусу мүмкүн. Бул учурда сызыктуу функция тиешелүү жактын ар бир чекитинде оптималдык мааниге ээ, б.а. маселенин чексиз чечимге ээ болот.



1-чийме

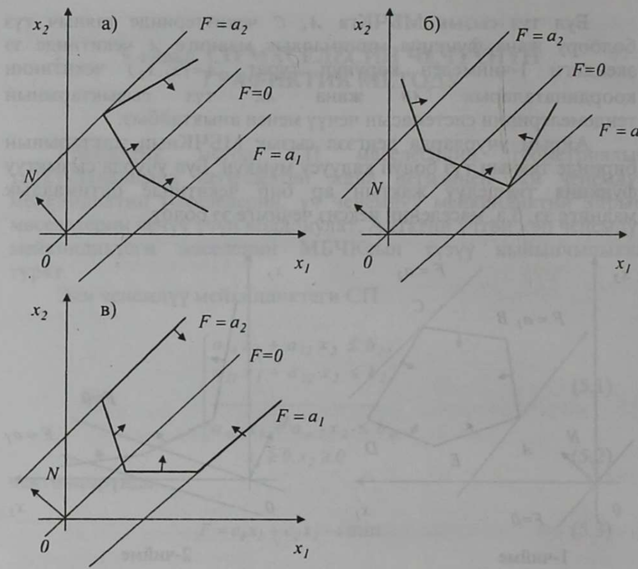


2-чийме

Эгерде маселенин МБЧКсы чектелбеген көп бурчтуу область болсо, эки учурдун болушу мүмкүн.

1-учур. $c_1x_1+c_2x_2=const$ түз сызыгын N векторунун багыты жана ага карама-каршы багытта жылдырууда МБЧКны дайыма кесип өтүү менен анын эч бир чекитинде таяныч түз болбойт (2-чийме). Мында сызыктуу функция МБЧКда жогору жагынан да, төмөн жагынан да чектелбеген, б.а. оптималдык мааниге ээ болбойт.

2-учур. Түздү жылдырууда МБЧКнын кандайдыр бир чекитинде таяныч түз болот. МБЧКнын түрүнө карата сызыктуу функция жогору жагынан чектелген, төмөн жагынан чектелбеген (3,а-чийме) же төмөн жагынан чектелген, жогору жагынан чектелбеген (3,б-чийме) жана эки жагынан бирдей чектелген (3,в-чийме) болуусу мүмкүн.



3-чийме

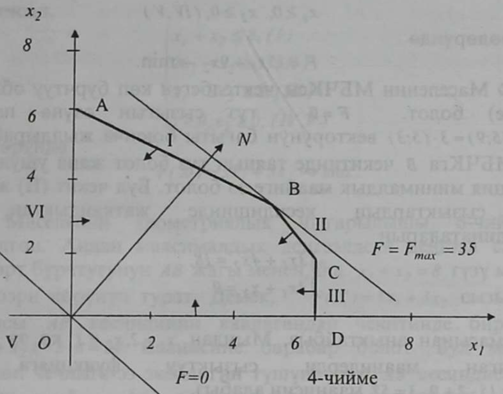
1-мисал. 2.1-пункттагы 1-мисалдын чечимин тапкыла:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 30, (I) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, (II) \\ 4x_1 \qquad\quad \le 24, (III) \\ \qquad\quad x_2 \le 8, (IV) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, (V), (VI)$$

чектөөлөрүндө

$$F = 4x_1 + 5x_2 \to \max.$$



4-чийме

◊ Маселенин МБЧКсы $OABCD$ беш бурчтугу (4-чийме) болот. $F=0$ түз сызыгын өзүнө параллель $N(4,5)$ векторунун багыты боюнча жылдырабыз. Бул түз МБЧКга O, B чекиттеринде таяныч түз болоору көрүнүп турат. Максималдык маанини аныктоо талап кылынгандыктан, маселенин оптималдык чечими B чекити болот. Анын координаталарын I жана II түздөрдүн кесилишинен, б.а.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 30, \\ 3x_1 + 2x_2 = 21 \end{cases}$$

системасынан аныктайбыз. Мындан $B(5,3)$ алынат.

Сызыктуу функциянын максималдык мааниси $F_{max} = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 35$ ке барабар.

Демек, $F_{max} = 35$ оптималдык маанисинде $x_1 = 5, x_2 = 3$, б.а. P_1 продукциясынан 5 бирдик, P_2 продукциясынан 3 бирдик өндүрүүдө 35 а.б. га барабар максималдык пайда алынат. ◊

2-мисал. 2.1-пункттагы 2-мисалдын оптималдык чечимин тапкыла:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 10, (I) \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 18, (II) \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, (III) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, (IV, V)$$

чектөөлөрүндө

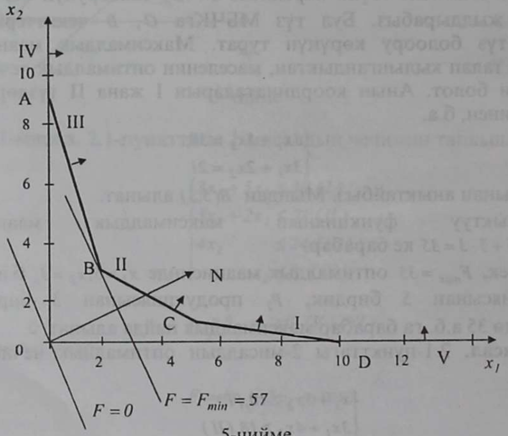
$$F = 15x_1 + 9x_2 \to \min.$$

◊ Маселенин МБЧКсы чектелбеген көп бурчтуу область (5-чийме) болот. $F = 0$ түз сызыгын өзүнө параллель $N = (15;9) = 3 \cdot (5;3)$ векторунун багыты боюнча жылдырабыз. Бул түз МБЧКга B чекитинде таяныч түз болот жана ушул чекитте функция минималдык мааниге ээ болот. Бул чекит (II) жана (III) түз сызыктардын кесилишинде жаткандыктан, анын координаталарын

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 18, \\ 3x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

системасынан аныктайбыз. Мындан $x_1 = 2, x_2 = 3$ кө ээ болобуз. Алынган маанилерди сызыктуу функцияга коюп, $F_{min} = 15 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 57$ маанисин алабыз.

Ошентип, $F_{min} = 57$ оптималдык чечиминде $x_1 = 2, x_2 = 3$, б.а. рациондо I тоюттан 2 бирдик, II тоюттан 3 бирдик болсо, рацион 57 а.б. болгон минималдуу наркка ээ болот. ◊



5-чийме

3-мисал.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, (I) \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, (II) \\ x_1 - 2x_2 \le 2, (III) \end{cases}$$

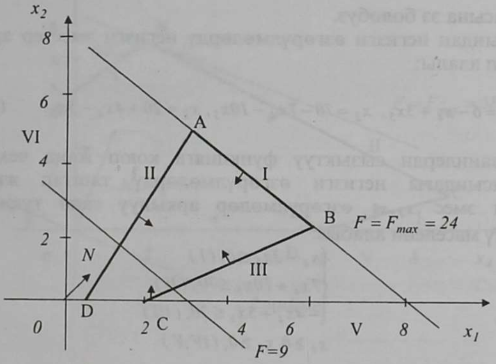
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, (IV, V)$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = 3x_1 + 3x_2 \to max.$$

◊ Маселенин геометриялык чыгарылышы 6-чиймеде көрсөтүлгөн. Андан максималдык деңгээлдеги деңгээл сызык $ABCD$ төрт бурчтугунун AB жагы менен, б.а. $x_1 + x_2 = 8$ түзү менен дал келээри көрүнүп турат. Демек, $F(X) = 3x_1 + 3x_2$ сызыктуу функциясы AB кесиндинин каалагандай чекитинде бир эле $F = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 8 = 24$ маанисине барабар болот. Бул маселе чексиз көп чечимге ээ экендигин түшүндүрөт. AB кесиндисинин чекиттери $x_2 = 8 - x_1$, $3 \le x_1 \le 6$ теңдемеси менен берилишет.

Мына ошентип, оптималдык чечимдердин $x_1 = c, x_2 = 8 - c$, $3 \le c \le 6$ чексиз көптүгүндө функциянын максималдык мааниси $F_{max} = 24$ болот. ◊



6-чийме

Графиктик метод менен өзгөрүлмөлөрдүн саны (n) менен чектөөлөрдүн системасындагы сызыктуу көз каранды эмес теңдемелердин саны (m) $n-m=2$ катышын канааттандырган каалагандай СП маселесин чечүүгө болот.

4-мисал. Маселенин оптималдык чечимин тапкыла:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$$

чектөөлөрүндө
$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max.$$

◊ x_1, x_2, x_3 өзгөрүлмөлөрүн негизги, x_4, x_5терди негизги эмес катары алалы. Чектөөлөр системасындагы x_1, x_2, x_3 өзгөрүлмөлөрү үчүн Гаусстун ыкмасындагы түз жүрүштү жүргүзүп, жыйынтыгында

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_4 - 3x_5 = 6, \\ \quad x_2 \quad + 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ \qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \tag{5.4}$$

системасына ээ болобуз.

Мындан негизги өзгөрүлмөлөрдү негизги эместер аркылуу туюнтуп алалы:

$$x_1 = 6 - x_4 + 3x_5,\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5,\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5. \tag{5.5}$$

Бул маанилерди сызыктуу функцияга коюп жана чектөөлөр системасындагы негизги өзгөрүлмөлөрдү таштап жиберип, негизги эмес x_4, x_5 өзгөрүлмөлөр аркылуу гана туюнтулган төмөнкү маселени алабыз:

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \le 6, (I) \\ 7x_4 + 10x_5 \le 70, (II) \\ -4x_4 + 5x_5 \le 20, (III) \end{cases}$$
$$x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, (IV, V)$$

чектөөлөрүндө

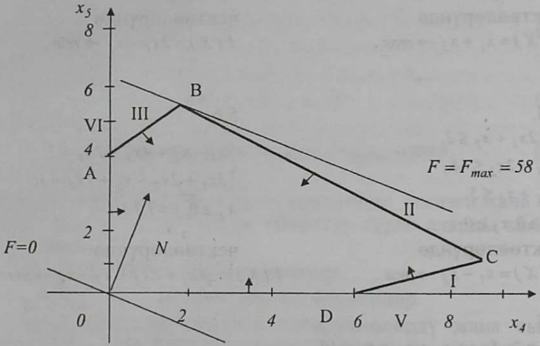
$$F(X) = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to max.$$

x_4Ox_5 координаталар системасында системанын МБЧКсын жана деңгээл сызыктарын түзүп алабыз (7-чийме). Чиймеден функция максималдык мааниге B чекитинде ээ болоору көрүнүп турат. Бул чекиттин координаталарын

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

системасынан аныктайбыз. Системадан $x_4 = 2; x_5 = 28/5$ ке ээ болобуз. Функциянын максималдык мааниси $F_{max} = -38 + 12 + 84 = 58$.

Баштапкы маселенин оптималдык чечимин аныктоо үчүн x_4, x_5 өзгөрүлмөлөрүнүн аныкталган маанилерин (5.5)-ге коёбуз. Жыйынтыгында $x_1 = 104/5; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 2; x_5 = 28/5$ ке ээ болобуз. ◊



7-чийме

Көнүгүүлөр

5.1. -5.7. маселелерин графиктик метод менен чыгаргыла.

5.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 - 6x_2 \to max.$

5.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 - x_2 \to min.$

5.3.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + x_2 \to max.$

5.4.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 - x_2 \to min.$

5.5.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 - x_2 \to max.$

5.6.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to max$

5.7.

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to min.$

VI глава. СИМПЛЕКС МЕТОД

6.1. Симплекс методдун алгоритми

Симплекс метод универсалдуу болуп саналат. Анткени каноникалык формадагы каалагандай СП маселесин чечүүгө мүмкүндүк берет. Симплекс (планды удаалаш жакшыртуу) методдун идеясы кандайдыр бир баштапкы таяныч пландан баштап, таяныч чечимдер боюнча оптималдык чечимге карай удаалаш багытталган өтүүнү жүргүзүүдөн турат. Мындай өтүүдө максимум маселесинде максаттуу функциянын мааниси кемибейт. Таяныч чечимдердин саны чектүү болгондуктан, чектүү кадамдан кийин оптималдык чечимди алабыз.

СПнын каноникалык формадагы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0 \tag{6.2}$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{6.3}$$

маселесин карайбыз. Мында өзгөрүлмөлөр негизги жана негизги эмеске ажыратылган болсун. Шарттуу түрдө аларды төмөнкүчө белгилейбиз:

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ - негизги өзгөрүлмөлөр

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - негизги эмес өзгөрүлмөлөр.

(6.1)-системадан негизги өзгөрүлмөлөрдү жана сызыктуу функцияны негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{rn}x_n, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$F(X) = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_nx_n. \tag{6.5}$$

Эгерде (6.4)-дөгү $\beta_i, i=1,2,...,r$ сандары терс эмес болушса, анда $X=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r,0,...,0)$ - базистик чечими таяныч чечим болот. Эгерде бош мүчөлөрдүн жок дегенде бири терс болсо, анда өзгөрүлмөлөрдүн баштапкы бөлүштүрүлүшү туура эмес болот жана өзгөрүлмөлөрдүн бөлүштүрүлүшүнүн башка вариантын тандоого туура келет.

Эгерде (6.5)-туюнтмада бардык $\gamma_j, j=r+1,r+2,...,n$ негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттери терс болсо, анда таяныч чечим оптималдык болот. Эгерде бул коэффициенттердин жок дегенде бири оң болсо, анда функциянын маанисин оң коэффициенттүү негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн каалаган бирин чоңойтуунун эсебинен чоңойтууга болот. Муну бул өзгөрүлмө негизги болгон жаңы таяныч чечимге өтүү менен ишке ашырууга болот. Мындай өтүүдө негизги өзгөрүлмөлөрдүн бири негизги эмеске өтөт. (6.5)-туюнтмадагы оң коэффициенттүү негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн ичинен максималдуу коэффициенттүү өзгөрүлмө, мисалы x_s өзгөрүлмөсү тандалып алынат. Мындай тандоо x_s өзгөрүлмөсүн чоңойтууда функциянын мааниси чоң ылдамдык менен өсөөрү менен түшүндүрүлөт, анткени функциянын бул өзгөрүлмө боюнча туундусу максималдуу. x_s ти негизгиге өткөрүүдө негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн бири, мисалы x_q негизги эмеске өтөт. Негизгиден чыгуучу x_q өзгөрүлмөсүн аныктоо үчүн x_s негизги эмес өзгөрүлмөсүн чоңойтобуз. Анын чоңоюшу функциянын маанисинин чоңоюшуна алып келет. Бирок x_s өзгөрүлмөсүн негизги эмес өзгөрүлмөлөр терс болбой тургандай, б.а.

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+\alpha_{1s}x_s\geq 0, \\ x_2=\beta_2+\alpha_{2s}x_s\geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r=\beta_r+\alpha_{rs}x_s\geq 0 \end{cases} \text{же} \begin{cases} x_s\geq -\beta_1/\alpha_{1s}, \\ x_s\geq -\beta_2/\alpha_{2s}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_s\geq -\beta_r/\alpha_{rs} \end{cases} \qquad (6.6)$$

шарты орун ала тургандай чоңойтобуз (муну (6.4)-системадан x_sтен башка бардык негизги эмес өзгөрүлмөлөрдү нөлгө барабарлап алабыз).

(6.6)-системанын $-\beta_i/\alpha_{is}, i=1,2,...,r$ катыштары *баалоочу катыштар* деп аталышат.

(6.6)-системадагы $x_s = -\beta_i / \alpha_{is}$, $i = 1,2,...,r$ оң баалоочу катыштарынын минималдуусуна тиешелеш теңдеме негизги эмеске өтүүчү x_q өзгөрүлмөсүн аныктайт.

Минималдык баалоочу катышка тиешелеш келүүчү (6.4)-системадагы x_q өзгөрүлмөсүн кармаган теңдеме *чечүүчү теңдеме* деп аталат. $\beta_i, i = 1,2,...,r$ сандарынын жок дегенде бири нөлгө барабар, б.а. базистик чечим кубулуучу учурду өзгөчө белгилеп кетебиз. Анда, эгерде α_{is} коэффициенти терс болсо, анда x_s өзгөрүлмөсүнүн каалагандай чоңоюсунда тиешелүү x_i өзгөрүлмөсү терс болот жана алынган нөлдүк чечим (6.6)-системанын минималдык баалоочу катышы катары алынат. Эгерде α_{is} коэффициенти оң болсо, анда x_s өзгөрүлмөсүнүн каалагандай чоңоюсунда x_i өзгөрүлмөсү дайыма оң болот жана алынган нөлдүк чечим минималдык баалоочу катыш катары алынбайт.

Негизгиге өтүүчү x_s жана негизгиден чыгуучу x_q өзгөрүлмөлөрү аныкталгандан кийин, жаңы негизги өзгөрүлмөлөрдү жаңы негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтуп, жаңы таяныч чечимди аныктайбыз. Бул процессти оптималдык чечим алынганга чейин улантабыз.

Баалоочу катыштарды аныктоонун мүмкүн болгон бардык учурларын карайбыз. x_q - негизги эмеске өтүүчү негизги эмес өзгөрүлмө, x_s - негизгиге өтүүчү өзгөрүлмө, β_i - бош мүчө, α_{is} - x_sтин коэффициенти болсун. Жалпы учурда $x_q = \beta_i + ... + \alpha_{is}x_s + ...$ теңдемесинен x_sтин эң чоң мүмкүн болгон маанисин же ал өзгөрүлмө үчүн баалоочу катышты төмөнкү эрежелердин негизинде аныктоого болот:

1) эгерде β_i жана α_{is} түрдүү белгилерде жана $\beta_i \neq 0$, $\alpha_{is} \neq 0$ болсо, анда $x_s = |\beta_i / \alpha_{is}|$ болот. Мисалы: $x_3 = 8 - 2x_2 + ...; x_2 = 8/2 = 4$ же $x_3 = -8 + 2x_2 + ...; x_2 = 8/2 = 4$.
2) эгерде β_i жана α_{is} бирдей белгиде жана $\beta_i \neq 0$, $\alpha_{is} \neq 0$ болсо, анда $x_s = \infty$ болот. Мисалы: $x_3 = 8 + 2x_2 + ...; x_2 = \infty$.
3) эгерде $\beta_i = 0$ жана $\alpha_{is} < 0$ болсо, анда $x_s = 0$ болот. Мисалы: $x_3 = 0 - 2x_2 + ...; x_2 = 0$.
4) эгерде $\beta_i = 0$ жана $\alpha_{is} > 0$ болсо, анда $x_s = \infty$ болот. Мисалы: $x_3 = 0 + 2x_2 + ...; x_2 = \infty$.

5) эгерде $\alpha_{is} = 0$ болсо, анда $x_s = \infty$ болот. Мисалы: $x_3 = 5 + 0 \cdot x_2 + ...;\ x_2 = \infty$.

Жогоруда айтылгандардан СП маселесин симплекс метод менен чечүүнүн төмөнкүдөй алгоритмин сунуштоого болот:

1. Маселени канондикалык түргө келтирүү.
2. Өзгөрүлмөлөрдү негизги жана негизги эместерге бөлүштүрүү.
3. Негизги өзгөрүлмөлөрдү негизги эместер аркылуу туюнтуу: чектөөлөр системасын негизги өзгөрүлмөлөргө карата чечүү.
4. Негизги өзгөрүлмөлөрдүн терс эместигин текшерүү. Андай болбосо 2-пунктка өтүү. Өзгөрүлмөлөрдү негизги жана негизги эмеске бөлүштүрүү жаңы вариантын тандоо (бул пункт өзгөрүлмөлөрдү баштапкы бөлүштүрүүдө гана каралат).
5. Максаттуу F функциясын негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтуу.
6. Учурдагы таяныч чечимди жана андагы функциянын маанисин эсептөө.
7. Оптималдуулукка текшерүү: эгерде сызыктуу функциянын негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулушунда оң коэффициентүү негизги эмес өзгөрүлмөлөр болбосо, анда максимум маселесинде учурдагы таяныч чечим оптималдуу болот. Эсептөө токтотулат. Антпесе 8-пунктка өтүлөт.
8. Негизги топко өтүүчү жана андан чыгуучу өзгөрлмөлөрдү аныктоо: функциянын туюнтулушундагы оң коэффициенттүү бир нече негизги өзгөрүлмө болсо, алардын ичинен максималдуу коэффициенттүү x_s өзгөрүлмөсүн негизгиге өткөрүү. Ал үчүн минималдык катышты аныктап жана ага тиешелүү x_q негизги өзгөрүлмөсүн негизги эмеске өткөрүү.
9. Өзгөрүлмөлөрдүн жаңы бөлүштүрүүсүн пайдаланып, 3-пунктка өтүү жана бардык этаптарды оптималдык чечим аныкталганга чейин улантуу.

Жогорудагы алгортмдин кадамдарынын аткарылышына сызыктуу функциянын максималдык маанисин аныктоо маселесин чыгарууда кеңири токтолуп кетебиз.

1-мисал. Ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселени (2.1-пунктту к.) симплекс метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 4x_1 \qquad \le 24, \\ \qquad x_2 \le 8, \end{cases} \tag{6.7}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = 4x_1 + 5x_2 \to max.$$

◊ Баланстык өзгөрүлмөлөрдүн жардамында чектөөлөр системасын

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 30, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 21, \\ 4x_1 + \qquad x_5 = 24, \\ \qquad x_2 + x_6 = 6. \end{cases} \tag{6.8}$$

көрүнүшүндө жазып алабыз. Баштапкы таяныч чечимди аныктоо үчүн өзгөрүлмөлөрдү негизги жана негизги эместерге бөлүп алабыз. Баланстык x_3, x_4, x_5, x_6 өзгөрүлмөлөрүнүн коэффициенттеринен түзүлгөн аныктагыч нөлдөн айырмалуу болгондуктан, маселени чечүүнүн I кадамында бул өзгөрүлмөлөрдү негизги катары алууга болот.

I кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: x_3, x_4, x_5, x_6.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_1, x_2.

Негизги өзгөрүлмөлөрдү негизги эместер аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases} \underline{x_3 = 30 - 3x_1 - 5x_2}, \\ x_4 = 21 - 3x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 24 - 4x_1, \\ x_6 = 8 - x_2. \end{cases} \tag{6.9}$$

Негизги эмес өзгөрүлмөлөрдү нөлгө барабарлап, б.а. $x_1 = 0, x_2 = 0$, $X_1 = (0;0;30;21;24;8)$ таяныч чечимин алабыз. Максаттуу функцияны негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтабыз: $F(X) = 4x_1 + 5x_2$. X_1 чечиминдеги функциянын мааниси $F(X_1) = 0$ гө барабар. F функциясынын маанисин x_1 же x_2 өзгөрүлмөлөрүнүн эсебинен чоңойтууга болот, анткени экөө теӊ оӊ коэффициент менен катышат. Чоӊ коэффициентүүсүн, б.а. x_2ни тандап алабыз. x_2 үчүн минималдык баалоочу катышты аныктайлы: $x_2 = min\{30/5; 21/2; \infty; 8/1\} = 6$. $x_2 = 6$ мааниси 1-теӊдемеге тиешелеш келгендиктен, ал теӊдеме чечүүчү болот жана ал чектөөлөр системасында алды сызылып коюлган. Демек, кийинки кадамда x_3 негизги эмес өзгөрүлмө болот.

II кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: x_2, x_4, x_5, x_6.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_1, x_3.

Чечүүчү теӊдемеден баштап, жаӊы негизги өзгөрүлмөлөрдү жаӊы негизги эместер аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - (3/5)x_1 - (1/5)x_3, \\ x_4 = 21 - 3x_1 - 2(6 - (3/5)x_1 - (1/5)x_3), \\ x_5 = 24 - 4x_1, \\ x_6 = 8 - (6 - (3/5)x_1 - (1/5)x_3) \end{cases} \tag{6.10}$$

же

$$\begin{cases} x_2 = 6 - (3/5)x_1 - (1/5)x_3, \\ \underline{x_4 = 9 - (9/5)x_1 + (2/5)x_3),} \\ x_5 = 24 - 4x_1, \\ x_6 = 2 + (3/5)x_1 + (1/5)x_3. \end{cases}$$

Экинчи $X_2 = (0;6;0;9;24;2)$ таяныч чечимди алабыз. Максаттуу функцияны негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтабыз: $F(X) = 4x_1 + 5(6 - (3/5)x_1 - (1/5)x_3) = 30 + x_1 - x_3$. Мындан $F_2 = F(X_2) = 30$. Максаттуу функциянын маанисинин кийинки кадамда өзгөрүшүн алдын ала негизгиге өтүүчү өзгөрүлмөнүн эӊ чоӊ мааниси менен анын сызыктуу функциядагы коэффициентинин көбөйтүндүсү катары аныктоого болот. Учурда $\Delta F_1 = 6 \cdot 5 = 30, F_2 = F_1 + \Delta F_1 = 0 + 30 = 30$ болот.

Сызыктуу функциянын бул мааниси максималдык болбойт, анткени анын маанисин x_1 өзгөрүлмөсүнүн эсебинен чоӊойтууга болот. Демек, бул өзгөрүлмөнү негизгиге өткөрөбүз. (6.10)-чектөөлөр системасынан x_1 өзгөрүлмөсүнүн минималдык баалоочу катышын аныктайбыз: $x_1 = min\{6:(3/5); 9:(9/5); 24/4; \infty\} = 5$. Экинчи теӊдеме чечүүчү болот жана x_4 өзгөрүлмөсү негизги эмеске өтөт. Мында $\Delta F_2 = 5 \cdot 1 = 5$.

III кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: x_1, x_2, x_5, x_6.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_3, x_4.

II кадамдагыдай эле чечүүчү теңдемеден баштап, жаңы негизги өзгөрүлмөлөрдү жаңы негизги эместер аркылуу туюнтабыз. Өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин

$$\begin{cases} x_1 = 5 + (2/9)x_3 - (5/9)x_4, \\ x_2 = 3 - (1/3)x_3 + (1/3)x_4, \\ x_5 = 4 - (8/9)x_3 + (20/9)x_4, \\ x_6 = 5 + (1/3)x_3 - (1/3)x_4 \end{cases}$$

системасын алабыз.

$X_3 = (5;3;0;0;4;5)$ - таяныч чечим. Максаттуу функцияны негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтабыз: $F(X) = 30 + (5 + (2/9)x_3 - (5/9)x_4) - x_3 = 35 - (7/9)x_3 - (5/9)x_4$. Мында оң коэффициентүү негизги эмес өзгөрүлмөлөр жок болгондуктан, сызыктуу функциянын $F_{max} = F(X_3) = 35$ мааниси максималдык маани болот. Демек, оптималдык чечим $X^* = X_3 = (5;3;0;0;4;5)$. ◊

Z сызыктуу функциясынын минимумун аныктоодо төмөндөгү эки ыкманы колдонууга болот:

1) $F = -Z$ белгилеп жана $Z_{min} = -F_{max}$ экендигин эске алып, F функциясынын максимумун издөө;

2) симплекс методду өзгөртүп колдонуу: ар бир кадамда сызыктуу функциянын маанисин анын туюнтулушуна терс коэффициент менен катышкан негизги эмес өзгөрүлмөнүн эсебинен кичирейтүү.

2-мисал. Маселени чыгаргыла.

$$\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ 5y_1 + 2y_2 + y_4 \ge 5, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4$$

чектөөлөрүндө

$$Z(X) = 30y_1 + 21y_2 + 24y_3 + 8y_4 \to min.$$

Маселени каноникалык түрдө жазып алабыз. Ал үчүн балангстык өзгөрүлмөлөрдү кийиребиз:

$$\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 + 4y_3 - y_5 = 4, \\ 5y_1 + 2y_2 + y_4 - y_6 = 5. \end{cases}$$

Негизги катары баланстык өзгөрүлмөлөрдү алсак, $Y=(0;0;0;0;-4;-5)$ мүмкүн болбогон базистик чечимди алабыз. Ошондуктан, кийинки калдамда y_3 жана y_4 өзгөрүлмөлөрүн негизги деп алуу ыңгайлуу. Анткени алар негизги өзгөрүлмөлөрдү тандоонун эрежесине туура келишет.

I кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: y_3, y_4.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: y_1, y_2, y_5, y_6.

Негизги өзгөрүлмөлөрдү жана сызыктуу функцияны негизги эместер аркылуу туюнтуп алабыз:

$$\begin{cases} y_3 = 1-(3/4)y_1-(3/4)y_2+(1/4)y_5, \\ \underline{y_4 = 5-5y_1-2y_2+y_6,} \end{cases}$$
$$Z(Y)=64-28y_1-13y_2+6y_5+8y_6.$$

$Y_1=(0;0;1;5;0;0)$ - биринчи таяныч чечим. $Z(Y_1)=64$ мааниси минималдуу эмес, анткени функцияны анын туюнтулушунда терс коэффициент менен катышкан өзгөрүлмөлөрдүн негизинде кичирейтүүгө болот. Абсолюттук чоңдугу боюнча чоң коэффициенттүү y_1 өзгөрүлмөсүн негизгиге өткөрөбүз. Ал үчүн минималдык баалоочу катыш: $y_1=min\{4/3;1\}=1$. Демек, y_4 негизги эмеске өтөт. 2-теңдеме чечүүчү болот.

II кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: y_1, y_3.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: y_2, y_4, y_5, y_6.

Негизги өзгөрүлмөлөрдү жана сызыктуу функцияны негизги эместер аркылуу туюнтуп алабыз:

$$\begin{cases} y_1 = 1-(2/5)y_2-(1/5)y_4+(1/5)y_6, \\ \underline{y_3 = 1/4-(9/20)y_2+(3/20)y_4+(1/4)y_5-(3/20)y_6,} \end{cases}$$
$$Z(Y)=36-(9/5)y_2+(28/5)y_4+6y_5+(12/5)y_6.$$

$Y_2=(1;0;1/4;0;0;0)$ - экинчи таяныч чечим. $Z(Y_2)=36$. Бул чечим да оптималдуу эмес. y_2 терс коэффициенттүү негизги эмес өзгөрүлмөсү үчүн минималдык баалоочу катыш: $y_2=min\{5/2;5/9\}=5/9$ болгондуктан, 2-теңдеме чечүүчү болот жана y_3 негизги эмеске өтөт.

III кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: y_1, y_2.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: y_3, y_4, y_5, y_6.

Мында
$$\begin{cases} y_1 = 7/9 + (8/9)y_3 - (1/3)y_4 - (2/9)y_5 + (1/3)y_6, \\ y_2 = 5/9 - (20/9)y_3 + (1/3)y_4 + (5/9)y_5 - (1/3)y_6, \end{cases}$$

$$Z(Y) = 35 + 4y_3 + 5y_4 + 5y_5 + 3y_6.$$

Акыркы сызыктуу функциянын туюнтулушунда терс коэффициент жок. Демек, $Y^* = Y_3 = (7/9; 5/9; 0; 0; 0; 0)$ оптималдуу чечим жана $Z_{min} = Z(Y^*) = 35$ болот. ◊

6.2. Баштапкы таяныч чечимди аныктоо

6.1-пунктта каралган мисалдарда оптималдык чечим баштапкы таяныч чечимден баштап, оптималдуулук критерийи аткарылганга чейин улам кийинки жаңы таяныч чечимге өтүү менен аныкталды. Бирок, дайыма биринчи кадамда эле таяныч чечимди алуу мүмкүн эмес. Таяныч чечимди аныктоонун алгоритмдеринин бирин мисалда карайлы.

Мисал. Маселени симплекс метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 \quad\quad \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө
$$F(X) = x_1 + 2x_2 \to max.$$

◊ x_3, x_4, x_5 баланстык өзгөрүлмөлөрүн кийиребиз жана чектөөлөр системасын
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

түрүндө жазып алабыз.

Мында
$$\begin{cases} y_1 = 7/9 + (8/9)y_3 - (1/3)y_4 - (2/9)y_5 + (1/3)y_6, \\ y_2 = 5/9 - (20/9)y_3 + (1/3)y_4 + (5/9)y_5 - (1/3)y_6, \end{cases}$$

$$Z(Y) = 35 + 4y_3 + 5y_4 + 5y_5 + 3y_6.$$

Акыркы сызыктуу функциянын туюнтулушунда терс коэффициент жок. Демек, $Y^* = Y_3 = (7/9; 5/9; 0; 0; 0; 0)$ оптималдуу чечим жана $Z_{min} = Z(Y^*) = 35$ болот. ◊

6.2. Баштапкы таяныч чечимди аныктоо

6.1-пунктта каралган мисалдарда оптималдык чечим баштапкы таяныч чечимден баштап, оптималдуулук критерийи аткарылганга чейин улам кийинки жаңы таяныч чечимге өтүү менен аныкталды. Бирок, дайыма биринчи кадамда эле таяныч чечимди алуу мүмкүн эмес. Таяныч чечимди аныктоонун алгоритмдеринин бирин мисалда карайлы.

Мисал. Маселени симплекс метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 \quad\quad \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө
$$F(X) = x_1 + 2x_2 \to max.$$

◊ x_3, x_4, x_5 баланстык өзгөрүлмөлөрүн кийиребиз жана чектөөлөр системасын
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

түрүндө жазып алабыз.

Айрым учурларда таяныч чечим бир канча кадамдан кийин алынышы мүмкүн.

Эскертүү. Эгерде базистик чечим мүмкүн болбогон чечим болсо жана негизги эместен негизгиге өтүүчү өзгөрүлмөлөрдү тандоо мүмкүндүгү болсо, анда терс бош мүчөлүү теңдемени чечүүчү катары аныктоочу негизги эмес өзгөрүлмөнү тандоо сунуш кылынат. Ушул учурда гана жаңы базистик чечимдин терс компоненттеринин саны жок дегенде бирге азаят. Эгерде чечүүчү теңдеме катары оң бош мүчөлүү теңдеме алынса, базистик чечимдеги терс компоненттердин саны азайбайт.

6.3. Симплекс методдун өзгөчө учурлары

СП маселесин симплекс метод менен чыгарууда кездешүүчү өзгөчө учурларга токтолуп кетели.

а) Альтернативдик оптимум.

1-мисал. Маселени симплекс метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = 3x_1 + 3x_2 \to max.$$

◊ Кезектеги кадамда

негизги өзгөрүлмөлөр: x_1, x_2, x_5,

негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_3, x_4

экендигин алабыз.

Негизги өзгөрүлмөлөрдү негизги эместер аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases} x_2 = 5 - (2/3)x_3 - (1/3)x_4, \\ x_1 = 3 - (1/3)x_3 + (1/3)x_4, \\ x_5 = 9 - x_3 - x_4. \end{cases}$$

$X_1=(3;5;0;0;9)$- таяныч чечим. Сызыктуу функцияны жазалы: $F=24-x_3$. Бул туюнтулушта оң коэффициентүү негизги эмес компонент жок. Демек, X_1 оптималдык чечим, $F_{max}=F(X_1)=24$ болот. Бирок функциянын акыркы туюнтулушунда x_4 негизи эмес өзгөрүлмөсү катышкан жок, ошондуктан анын өзгөрүшү сызыктуу функцияны өзгөртпөйт. x_4 өзгөрүлмөсүн негизгиге өткөрөлү. $x_4=min\{15;\infty;9\}=9$ болгондуктан, x_5 өзгөрүлмөсү негизги эмеске өтөт. $\Delta F=9\cdot 0=0$, б.а. сызыктуу функциянын маниси өзгөрбөйт. Кийинки кадамда $X_2=(6;2;0;9;0)$ жаңы таяныч чечимин, $F_{max}=F(X_2)=24$ алабыз. $x_3=0$ жана x_4 өзгөрүлмөсү $0\le x_4\le 9$ шартын канааттандыруусун эске алып, системадан маселенин бардык оптималдык чечимдердин көптүгүн алууга болот. $x_4=t$ деп белгилейбиз, мында $0\le t\le 9$. Анда оптималдык чечимдердин көптүгү

$x_1=3-(1/3)t,\ x_2=5-(1/3)t,\ x_3=0,\ x_5=9-t(t\in[0;9])$ болот. ◊

б) Кубулуучу таяныч чечимдин пайда болуусу.

2-мисал. Маселени симплекс метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1-x_2\le 2, \\ 3x_1-2x_2\le 6, \\ 6x_1-4x_2\le 14, \end{cases}$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$F(X)=2x_1-x_2\to max.$$

◊ Негизги өзгөрүлмөлөр катары алынуучу баланстык өзгөрүлмөлөрдү кийиребиз.

I кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: x_3,x_4,x_5.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_1,x_2.

Өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин

$$\begin{cases} x_3=2-x_1+x_2, \\ x_4=6-3x_1+2x_2, \\ x_5=14-6x_1+4x_2 \end{cases}$$

системасын жана $X_1=(0;0;2;6;14)$ таяныч чечимин алабыз. $F(X)=2x_1-x_2$, $F_1=F(X_1)$. Оптималдуулук критерийи аткарылбагандыктан, x_1 өзгөрүлмөсүн негизгиге өткөрөбүз. Анткени ал функциянын туюнтулушуна оң коэффициент менен катышып жатат. Минималдык баалоочу катышты аныктайлы: $x_1=min\{2;6/3;14/6\}=2$. Алар биринчи эки теңдемеде бирдей. Ошондуктан чечүүчү катары экөөнүн каалаган бирин алууга болот. Биринчини алалы.

II кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: x_1,x_4,x_5.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_2,x_3.

Өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин:

$$\begin{cases} x_1=2+x_2-x_3, \\ \underline{x_4=0-x_2+3x_3,} \\ x_5=2-2x_2+6x_3 \end{cases}$$

жана $X_2=(2;0;0;\mathbf{0};2)$ кубулуучу таяныч чечимди алабыз. Себеби мында x_4 негизги өзгөрүлмөсү нөлгө барабар. Максаттуу функцияны негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтабыз: $F(X)=4+x_2-2x_3$. Мындан x_2 өзгөрүлмөсүн негизгиге өткөрөбүз. $x_2=min\{\infty;0;1\}=0$ болгондуктан, кийинки кадамда функциянын мааниси өзгөрбөйт, б.а. $\Delta F=0\cdot 1=0$. Бул симплекс методдун чечимди жакшыртуу принцибине туура келбейт.

III кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: x_1,x_2,x_5.

Негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_3,x_4.

Өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин

$$\begin{cases} x_1=2+2x_3-x_4, \\ x_2=0+3x_3-x_4, \\ \underline{x_5=2+2x_4.} \end{cases}$$

$X_3=(2;\mathbf{0};0;0;2)$ бул таяныч чечим да кубулуучу. X_3 чечими X_2 ден негизги өзгөрүлмөлөрүнүн жыйындысы менен гана айрымаланат. Максаттуу функцияны негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулушу: $F(X)=4+x_3-x_4$, $F_3=F(X_3)=4$.

Акыркы кадам сызыктуу функциянын маанисинин өсүүсүнө алып келбесе да, жаңы таяныч чечим алынды. (Масeлени өз алдынча чыгаруу сунушталат). ◊

Натыйжа. Эгерде кандайдыр бир кадамда өзгөрүлмө мүмкүн болгон эң чоң мааниге бир нече теңдемеде ээ (баалоочу катыштары дал келсе) болсо, анда алардын каалаган бири чечүүчү катары алууга болот. Кийинки кадамда кубулуучу таяныч чечимди алабыз. Кезектеги таяныч чечимге өтүү максаттуу функциянын маанисин өзгөртпөйт $(\Delta F = 0)$.

Эскертүү. Оптималдык чечимдеги кубулуучулук альтернативдик чечимге алып келүүсү мүмкүн.

в) Чектүү оптимумдун жашабоосу.

3-мисал. Маселени симплекс метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = 2x_1 - 3x_2 + 1 \to min.$$

◊ Маселени симплекс метод менен чыгаруунун кезектеги кадамында төмөнкүлөрдү алабыз:

негизги өзгөрүлмөлөр: x_1, x_2, x_5;

негизги эмес өзгөрүлмөлөр: x_3, x_4,

$$\begin{cases} x_1 = 5/3 + (1/3)x_3 + (1/3)x_4, \\ x_2 = 7/3 + (2/3)x_3 - (1/3)x_4, \\ x_5 = 4 + x_3 - x_4, \end{cases}$$

$X_4 = (5/3; 7/3; 0; 0; 4)$ - таяныч чечим. Сызыктуу функция $F(X) = -1/3 - (2/3)x_3 + (4/5)x_4$ түрүндө болгондуктан, оптималдуулук критерийи орун албайт. Терс коэффициентүү негизги эмес өзгөрүлмө x_3 үчүн минималдык баалоочу катышты аныктайлы: $x_3 = min\{\infty; \infty; \infty\} = \infty$. Мындан системанын эч бир теңдемеси бул өзгөрүлмөнүн эң чоң мүмкүн болгон маанисин чектебегендиги келип чыгат. Ошондуктан, F функциясынын мааниси чектелбеген жана терс болот, б.а. $F_{min} = -\infty$. ◊

Натыйжа. Негизгиге өткөрүлүүчү негизги эмес өзгөрүлмөнүн бардык теңдемелердеги баалоочу катыштары чексиз болсо, анда маселенин чектүү оптималдык мааниси жашабайт (максимум маселесинде $F_{max} = \infty$, минимум маселесинде $F_{min} = -\infty$).

Жыйынтыктап, айтканда эгерде чектөөлөр системасы карама-каршылыктуу болбосо, симплекс методун чектүү кадамдарын удаалаш аткаруу маселенин чектүү оптималдык маанисин аныктоого же чектүү оптималдык маанисинин жашабай тургандыгына алып келет.

6.4. Маселени симплекстик таблицалардын жардамында чыгаруу

Маселелерди симплекс метод менен чыгаруудагы практикалык эсептөөлөр азыркы учурда компьютердин жардамында жүргүзүлөт. Бирок эсептөөлөр компьютерсиз жүргүзүлсө, анда симплекс таблицаларды пайдалануу ыңгайлуу болот. Симплекс таблицаларды түзүүнү жана аларда эсептөөлөрдү жүргүзүүнүн алгоритмин карайлы:

I. Маселени каноникалык түргө келтиребиз. Өзгөрүлмөлөрдү негизги (базистик) жана негизи эместерге ажыратабыз да, негизги өзгөрүлмөлөрдү жана сызыктуу функцияны негизги эместер аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{rn}x_n, \end{cases}$$

$$F(X) = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n$$

же

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha'_{1,r+1}x_{r+1} - \alpha'_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - \alpha'_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha'_{2,r+1}x_{r+1} - \alpha'_{2,r+2}x_{r+2} - \ldots - \alpha'_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r - \alpha'_{r,r+1}x_{r+1} - \alpha'_{r,r+2}x_{r+2} - \ldots - \alpha'_{rn}x_n, \end{cases}$$

$$F(X) = \gamma_0 - \gamma'_{r+1}x_{r+1} - \gamma'_{r+2}x_{r+2} - \ldots - \gamma'_n x_n .$$

Мында $\alpha'_{ij} = -\alpha_{ij}$, $\gamma'_j = -\gamma_j$, $i = 1,2,...,r$, $j = r+1, r+2...,n$ жана шарттуу түрдө негизги өзгөрүлмөлөр - $x_1, x_2, ..., x_r$, негизги эместер $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ деп белгиленди.

Системадагы $\beta_i, i = 1,2,..,r$ бош мүчөлөрү оң болсун.

II. Баштапкы таблицаны жазып алабыз. Сызыктуу функциянын карама-каршы белгиси менен алынган коэффициенттери, б.а. $\gamma'_j = -\gamma_j, j = r+1, r+2...n$ сандары баалоочу жолчо деп аталуучу акыркы жолчого жазылат. Таблицанын сол жаккы биринчи мамычасына негизги өзгөрүлмөлөр, экинчисине чектөөлөр системасынын бош мүчөлөрү, биринчи жолчосуна негизги эмес өзгөрүлмөлөр (-1) ге көбөйтүлүп жазылат. Ал эми акыркы мамычасына баалоочу катыштар, таблицанын калган бөлүгүнө жогорудагы системанын $\alpha'_{ij}, i = 1,2,...,r, j = r+1, r+2...,n$ коэффициенттери жазылат (1-табл. к.). Андан кийин таблица анык бир эрежелердин негизинде өзгөртүлөт.

1-таблица

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр				Баалоочу катыш
		$-x_{r+1}$	$-x_{r+2}$	$\ldots$	$-x_n$	
x_1	β_1	$\alpha'_{1,r+1}$	$\alpha'_{1,r+2}$	$\ldots$	α'_{1n}	
x_2	β_2	$\alpha'_{2,r+1}$	$\alpha'_{2,r+2}$	$\ldots$	α'_{2n}	
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
x_r	β_r	$\alpha'_{r,r+1}$	$\alpha'_{r,r+2}$	$\ldots$	α'_{rn}	
F	γ_0	γ'_{r+1}	γ'_{r+2}	$\ldots$	γ'_n	

III. Оптималдуулук критерийинин, б.а. акыркы жочодо $\gamma'_j < 0$ (максимум маселеси үчүн) шартын канааттандыруучу коэффициенттердин болушун текшеребиз. Эгерде мындай коэффициенттер жок болсо, анда чечим оптималдык чечим жана $F_{max} = \gamma_0$ болот. Мында негизги өзгөрүлмөлөрдүн маанилери $\beta_i, i = 1,2,...,r$ маанилерине (экинчи мамычадагы тиешелүү бош мүчөлөргө), ал эми негизги эмес өзгөрүлмөлөр 0 гө барабар болушат.

IV. Эгерде оптималдуулук критерийи аткарылбаса, анда модулу боюнча эң чоң терс $\gamma_j' < 0$ коэффициентке туура келүүчү мамычаны *чечүүчү мамыча* деп атайбыз. Ал мамычанын номери s болсун.

Ар бир жолчо үчүн баалоочу катыштарды төмөнкү эреженин негизинде аныктайбыз:

1) эгерде β_i жана α_{is}' түрдүү белгилерде болсо, анда ∞;

2) эгерде $\beta_i = 0$ жана $\alpha_{is}' < 0$ болсо, анда ∞;

3) эгерде $\alpha_{is}' = 0$ болсо, анда ∞;

4) эгерде $\beta_i = 0$ жана $\alpha_{is}' > 0$ болсо, анда 0;

5) эгерде β_i жана α_{is}' бирдей белгиде болсо, анда $\left|\dfrac{\beta_i}{\alpha_{is}'}\right|$.

$\min\limits_i \left\{ \left| \dfrac{\beta_i}{\alpha_{is}'} \right| \right\}$ чоңдугун аныктайбыз. Эгерде чектүү баалоочу катыш болбосо, анда маселенин чектүү оптимуму жашабайт ($F_{max} = \infty$). Эгерде чектүү баалоочу катыш болсо, анда минималык баалоочу катышка туура келүүчү q жолчосун тандап алабыз жана аны *чечүүчү жолчо* деп атайбыз. Чечүү жолчо менен чечүүчү мамычанын кесилишинен чечүүчү α_{qs}' элементи аныкталат.

V. Төмөнкү эрежелер боюнча кийинки таблицага өтөбүз:

а) биринчи сол жактагы мамычага жаңы базисти жазабыз. x_q негизги өзгөрүлмөсүнүн ордуна x_s негизги эмес өзгөрүлмөсү, ал эми x_s тин ордуна x_q негизги өзгөрүлмөсү жазылат;

б) q - номердеги жаңы жолчону мурункусун α_{qs}' чечүүчү элементке бөлүүдөн (чечүүчү α_{qs}' элемент жайланышкан торчодон сырткары) алабыз;

в) s - номердеги жаңы мамычаны мурункусун $(-\alpha_{qs}')$ санына бөлүүдөн (чечүүчү α_{qs}' элемент жайланышкан торчодон сырткары) алабыз;

г) мурунку чечүүчү элементке туура келген жаңы торчого $(\alpha'_{qs})^{-1}$ саны жазылат;

д) калган бардык α''_{ij} элементтерин төмөндөгүдөй тик бурчтук эрежеси боюнча эсептейбиз:

$$\alpha''_{ij} = \alpha'_{ij} - \frac{\alpha'_{is}\alpha'_{qj}}{\alpha'_{qs}},$$

$$\beta''_i = \beta'_i - \frac{\alpha'_{is}\beta'_q}{\alpha'_{qs}}.$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha'_{ij} & \text{------} & \alpha'_{is} \\ \vert & & \vert \\ \alpha'_{qj} & \text{------} & \alpha'_{qs} \end{array}$$

Андан кийин алгоритмдин III пунктуна өтөбүз.

6-мисал. Ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселени симплекстик таблицаны пайдаланып чыгаргыла.

◊ Негизги өзгөрүлмөлөр катары x_3, x_4, x_5, x_6 өзгөрүлмөлөрүн алып, аларды негизги эместер аркылуу туюнтабыз:

$$\begin{cases} x_3 = 30 - 3x_1 - 5x_2, \\ x_4 = 21 - 3x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 24 - 4x_1, \\ x_6 = 8 - x_2. \end{cases}$$

Эреже боюнча биринчи симплекс таблицаны түзүп алабыз (2-таблица). Акыркы жолчого сызыктуу функциянын коэффициенттери карама-каршы белгилери менен жазылат.

Алгоритмдин III пунктуна ылайык оптималдуулукка текшеребиз. Акыркы жолчодо терс коэффициенттер бар. Алардын ичинен абсолюттук белгиси боюнча чоңу (-5) болгондуктан, экинчи мамыча чечүүчү болот жана x_2 өзгөрүлмөсү негизгиге өтөт. IV пунктка ылайык минималдык баалоочу катышты $x_2 = min\{30/5; 21/2; \infty; 8/1\} = 6$ аныктайбыз. Мындан чечүүчү жолчо биринчи жолчо, чечүүчү элемент $\alpha'_{12} = 5$ экендигине ээ болобуз. x_3 негизги эмеске өтөт да x_2 нин ордуна, ал эми x_3 түн ордуна x_2 жазылат.

2-таблица

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_1$	$-x_2$	
x_3	30	3	5	30/5 ←
x_4	21	3	2	21/2
x_5	24	4	0	∞
x_6	8	0	1	8/1
F	0	-4	-5	
			↑	

3-таблицаны алгоритмдин V пунктуна ылайык толтурабыз:

а) жаңы базисте негизги өзгөрүлмөлөр: x_2, x_4, x_5, x_6;

б) 1-жаңы жолчону мурункусун 5ке бөлүүдөн (чечүүчү элемент жайланышкан торчодон сырткары) алабыз;

в) 2-жаңы мамычаны мурункусун (-5) ке бөлүүдөн (чечүүчү элемент жайланышкан торчодон сырткары) алабыз;

г) мурунку чечүүчү элементке туура келген жаңы торчого 5^{-1} санын б.а. чечүүчү элементке тескери санды жазабыз. Калган торчолорду тик бурчтук эрежеси боюнча толтурабыз. Мисалы: $\beta_2'' = 21 - \frac{30 \cdot 2}{5} = 6, \alpha_{21}'' = 3 - \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{9}{5}$ ж.б.

Натыйжада экинчи симплекстик таблицаны алабыз.

3-таблица

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_1$	$-x_3$	
x_2	6	3/5	1/5	10
x_4	9	9/5	-2/5	5 ←
x_5	24	4	0	6
x_6	2	-3/5	-1/5	∞
F	30	-1	1	
		↑		

Мында да оптималдуулук критерийи аткарылган жок. Биринчи мамыча чечүүчү, ошондуктан x_1 негизгиге өтөт. Минималдык баалоочу катыш $min\{10;5;6;\infty\} = 5$ болгондуктан, экинчи жолчо чечүүчү болот. Анда чечүүчү элемент $\alpha''_{21}=\frac{9}{5}$ болот. x_1 жана x_4 төрдүн орундарын алмаштырып жазабыз.

Жаңы симплекс таблица төмөнкү көрүнүштө болот.

4-таблица

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_4$	$-x_3$	
x_2	3	-1/3	1/3	
x_1	5	5/9	-2/9	
x_5	4	-20/9	8/9	
x_6	5	1/3	-1/3	
F	35	5/9	7/9	

Оптималдуулук критерийи аткарылгандыктан, функциянын максималдык мааниси $F_{max}=35$ жана оптималдык чечим $(5;3;0;0;4;5)$ болот. ◊

6.5. Жасалма базис методу

Жогоруда баштапкы таяныч чечимди аныктоонун алгоритми баяндалган. Бирок, симплекс таблицаларды пайдаланып чыгарууда *жасалма базис методун* (M - метод деп да аталат) колдонууга болот.

Мында базистик чечимдеги терс компонентке туура келүүчү ар бир теңдемеге, белгилери тиешелүү бош мүчөлөрдүн белгилериндей болгон жаңы $y_1, y_2, ..., y_k$ жасалма өзгөрүлмөлөрүн кийиребиз. Биринчи таблицада негизги өзгөрүлмөлөр катары жасалма өзгөрүлмөлөрдү жана базистик чечимдеги терс эмес компоненттүү баланстык өзгөрүлмөлөрдү алабыз. Жаңы $T=F-M(y_1+y_2+...+y_k)$ сызыктуу функциясын түзөбүз жана T - маселесинин максимумун издейбиз, мында M - каалагандай чоң оң сан. $M(y_1+y_2+...+y_k)$ туюнтмасын M - *функция* деп атайбыз.

Бул учурда төмөндөгү теорема орунга ээ.

Теорема.

1. Эгерде T - маселесинин оптималдык чечиминде бардык жасалма өзгөрүлмөлөр нөлгө барабар болушса, анда калган

өзгөрүлмөлөрдүн тиешелүү маанилери баштапкы маселенин оптималдык чечимин беришет (б.а. эгерде $y_1 = y_2 = ... = y_k = 0$ болсо, анда $T_{max} = F_{max}$).

2. Эгерде T - маселенин оптималдык чечиминдеги жок дегенде бир жасалма өзгөрүлмө нөлдөн айрымалуу болсо, анда баштапкы маселенин чектөөлөр системасы биргелешпеген болот.

3. Эгерде $T_{max} = \infty$ болсо, анда баштапкы маселенин чечими жашабайт. Мында $F_{max} = \infty$ же маселенин шарты карама – каршылыктуу болот.

Теоремадан алгач M- функциянын минимумун табуу керектиги келип чыгат. Эгерде ал нөлгө барабар болсо, анда бардык жасалма өзгөрүлмөлөр нөлгө айланышат. Андан ары аларды таштап жиберип жана алынган таяныч чечимди пайдаланып, баштапкы маселени чечүүгө болот. Практикада M-функциянын минимуму эмес, $(-M)$- функциянын максимуму изилденет.

Мисал. Маселени M - метод менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow max.$$

◊ Баланстык өзгөрүлмөлөрдү кийирип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10. \end{cases}$$

X_1 =(0;0;0;**-2**;10) - биринчи базистик чечим мүмкүн болбогон чечим. Терс компонента экинчи теңдемеге туура келгендиктен, ага y_1 өзгөрүлмөсүн «+» белгиси менен кошуп жазабыз:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + y_1 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10 \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + 2x_2, \\ y_1 = 2 - x_1 - 2x_2 + x_4, \\ x_5 = 10 - 2x_1 - x_2, \end{cases}$$

$$T = 4x_1 - 2x_2 - My_1 \to max.$$

Биринчи симплекс таблицаны түзүп алабыз (5-табл.).

5 – таблица

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр			Баалоочу катыш
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	
x_3	0	1	-2	0	∞
y_1	2	1	2	-1	1←
x_5	10	2	1	0	10
F	0	-4	2	0	
$-M_\phi$	$-2M$	$-M$	$-2M$	M	
			↑		

Акыркы жолчо ($-M$)-функцияга, б.а. $(-M_\phi)y_1$ ге туура келет. Аны y_1 жолчосун ($-M$) ге көбөйтүү аркылуу толтурабыз. ($-M$)-функциясынын максимуму үчүн оптималдуулук критерийинин орун алышын текшеребиз. Акыркы жолчодо минималдык терс коэффициент $(-2M)$ болгондуктан, 2-мамыча чечүү болот. Ал эми чечүүчү жолчо 2 – жолчо. Демек, x_2 негизгиге, y_1 негизги эмеске өтөт да, кийинки базистик чечимде нөлгө айланат жана мындан ары каралбайт.

Алгоритмге ылайык 6-табл. алабыз.

6 - таблица

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_1$	$-x_4$	
x_3	2	2	-1	
x_2	1	1/2	-1/2	
x_5	9	3/2	1/2	
F	-2	-5	1	max
$-M_\phi$	0	0	0	max

Акыркы жолчодон оптималдуулук критерийи орун алгандыгы жана $max(-M_{ф})=0$ же болбосо $min M_{ф}=0$ экендиги көрүнүп турат. Мындан ары бул жолчону карабайбыз. (0;1;2;0;9) баштапкы таяныч чечими алынды. Мындан ары улантып, баштапкы маселенин чечимин аныктайбыз. (Окурмандарга өз алдынча чечүүгө сунушталат). ◊

Көнүгүүлөр

Маселелерди симплекс метод менен чыгаргыла.

6.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 - 6x_2 \to max$.

6.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 - x_2 \to min$.

6.3.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + x_2 \to max$.

6.4.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 - x_2 \to min$.

6.5.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 - x_2 \to max$.

6.6.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 4x_1 - 2x_2 \to max$.

6.7.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to max$.

6.8.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to min$.

6.9.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to min$.

6.10.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$.

6.11.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 \geq -1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + 3x_3 + 3x_4 \to min$.

6.12.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to max$.

6.13.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = -x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \to min$.

6.14.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = -3x_2 + x_3 - x_4 \to max$.

VII глава. ӨЗ АРА ТҮГӨЙЛӨШ МАСЕЛЕЛЕР

Сызыктуу программалоонун каалагандай маселесине түгөйлөшү деп аталуучу сызыктуу программалоонун башка бир маселесин тиешелештикке коюуга болот. Биринчи маселе баштапкы болуп эсептелет. Бул эки маселе бири-бири менен тыгыз байланышкан жана бирдиктүү түгөйлөш системаны түзүшөт.

7.1. Ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселенин түгөйлөш маселеси

II главада ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселе каралган. Маселенин моделинде $b_i, \ i=1, \ 2,...,m$ аркылуу S_i ресурсунун запасы; a_{ij} менен $P_j, \ j=1,2,...,n$ продукциясынын бирдигин өндүрүүдө сарпталган S_i ресурсунун бирдигинин саны; c_j менен P_j продукциясынын бирдигин сатуудан түшкөн пайданы же анын баасын белгилегенбиз.

Кандайдыр бир экинчи ишкана $S_1, S_2,..., S_m$ ресурстарын сатып алууну чечти дейли. Ресурстардын $y_1, y_2,..., y_m$ оптималдуу сатылуу бааларын аныктоо талап кылынсын.

Сатып алуучу ишкана ресурстарды $b_1, b_2,..., b_m$ көлөмдөрүндө тиешелүү түрдө $y_1, y_2,..., y_m$ бааларында сатып алууга кеткен чыгымдарын минималдаштырууга аракеттенээри белгилүү, б.а.

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min.$$

Экинчи жактан биринчи ишкана ресурстарды сатуудан түшкөн пайда аларды кайра иштетүүдөн түшкөн пайдадан кем эмес болуусуна аракеттенет. P_1 продукциясынын бирдигин өндүрүү үчүн S_1 ресурсунан a_{11} бирдик, S_2 ресурсунан a_{21} бирдик,..., S_i ресурсунан a_{i1} бирдик,..., S_m ресурсунан a_{m1} бирдик тиешелүү түрдө $y_1, y_2,..., y_m$ бааларында сарпталат. Сатуучу ишкана үчүн P_1 продукциясынын бирдигин өндүрүү үчүн кеткен чыгымдар анын баасы c_1 ден кем болбоосу керек, б.а.

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \ge c_1 .$$

Мындай барабарсыздык түрүндөгү чектөөнү калган $P_2, P_3 ..., P_n$ продукциялары үчүн да жазууга болот. Алынган II түгөйлөш маселенин экономика-математикалык модели жана мазмуну 1- таблицанын оң бөлүгүндө келтирилген.

1- таблица

I маселе (баштапкы)	II маселе (түгөйлөш)
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$ (7.1)	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad ..... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$ (7.4)
$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, ..., \ x_n \ge 0$ (7.2) чектөөлөрүндө $F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max$ (7.3)	$y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, ..., \ y_m \ge 0$ (7.5) чектөөлөрүндө $Z(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to min$ (7.6)
Продукциянын ар бир түрү боюнча ресурстарды сарптоо запастардан ашпай тургандай жана сатуудан түшкөн пайда максималдуу боло тургандай продукцияларды өндүрүүнүн $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ планын тапкыла.	Продукциянын ар бир түрүн өндүрүүдөгү ресурстарга жумшалган чыгымдар бул продукцияларды реализациялоодон түшкөн пайдадан кем болбой тургандай жана ресурстарга кеткен жалпы чыгымдар минималдуу боло тургандай ресурстардын бааларынын $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ жыйындысын тапкыла.

$y_1, y_2, ..., y_m$ баалары маселени чечүүнүн жыйынтыгында аныкталгандыктан *ресурстардын баалары* деп аталат.

7.2. Сызыктуу программалоонун түгөйлөш маселелерин түзүү жана алардын касиеттери

Сызыктуу программалоонун I жана II өз ара түгөйлөш маселелери берилсин. Бул маселелер төмөнкү касиеттерге ээ болушат:

1. Биринде сызыктуу функциянын максимуму изделсе, экинчисинде минимуму изделет.

2. Маселелердин бириндеги сызыктуу функциядагы өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттери экинчисиндеги чектөөлөр системасындагы бош мүчөлөр болушат.

3. Маселелер каноникалык эмес формада болушат. Максимум маселесинде бардык барабарсыздыктар «≤» түрүндө, ал эми минимум маселесинде «≥» түрүндө болот.

4. Маселелердин чектөөлөр системасындагы өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринен түзүлгөн матрицалар бири-бирине транспонирленген болушат:

$$\text{I маселе үчүн} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{II маселе үчүн} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5. Маселелердин бириндеги чектөөлөр системасындагы барабарсыздыктардын саны экинчисиндеги өзгөрүлмөлөрдүн саны менен дал келет.

6. Өзгөрүлмөлөрдүн терс эмес болуу шарты эки маселеде бирдей болот.

Жогорудагы касиеттерге ээ болгон сызыктуу программалоонун I жана II маселелери *симметриялуу өз ара түгөйлөш маселелер* деп аталышат. Мындан ары жөнөкөйлүк үчүн аларды жөн гана *түгөйлөш маселелер* деп айтабыз.

Симметриялуу түгөйлөш маселелердин касиеттеринен аларды түзүүнүн төмөнкү алгоритми келип чыгат:

1. Баштапкы маселенин чектөөлөр системасынын бардык барабарсыздыктарын бирдей түргө келтирүү: эгерде максимум изделсе «≤» түргө, ал эми минимум маселесинде «≥» түргө келтирүү. Бул шарт аткарылбаган барабарсыздыктарды -1 ге көбөйтүү жетиштүү.

2. Системадагы өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринин *A* матрицасына, системанын бош мүчөлөрүнүн мамычасын жана

сызыктуу функциядагы өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринин жолчосун кошуу менен кеңейтилген A_1 матрицасын түзүү.

3. A_1 матрицасынын транспонирленген A_1' матрицасын түзүү.

4. A_1' матрицасынын жана өзгөрүлмөлөрдүн терс эмес болуу шартынын негизинде түгөйлөш маселени жазуу.

Мисал. Төмөнкү маселеге түгөйлөш маселени жазгыла.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = -x_1 + 2x_2 \to max.$$

◊ 1. Баштапкы маселеде максимум изделгендиктен системанын барабарсыздыктарын «≤» түргө келтиребиз. Ал үчүн биринчи жана төртүнчү барабарсыздыктарды -1 ге көбөйтөбүз. Анда система

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le -5 \end{cases}$$

түрүндө жазылат.

2. Системанын кеңейтилген матрицасын жазып алабыз:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & F \end{pmatrix}.$$

3. A_1 матрицасына транспонирленген A_1' матрицасын түзөбүз:

$$A_1' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{pmatrix}.$$

4. Түгөйлөш маселени жазабыз:

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$Z(Y) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to min. \Diamond$$

7.3. Түгөйлөштүктүн биринчи теоремасы

Түгөйлөш маселелердин оптималдык чечимдеринин арасындагы байланыш түгөйлөштүктүн теоремаларынын жардамында орнотулат. Алгач түгөйлөштүк теориясындагы негизги барабарсыздык жөнүндөгү жардамчы ырастоону карайлы.

Ырастоо. Баштапкы жана түгөйлөш маселенин каалагандай $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ жана $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ мүмкүн болгон чечимдери үчүн

$$F(X) \le Z(Y) \text{ же } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (7.7)$$

барабарсыздыгы орун алат.

□ Баштапкы маселенин чектөөлөрүнүн $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1,2,...,m$ системасынын барабарсыздыктарын тиешелүү түрдө $y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_m$ өзгөрүлмөлөрүнө көбөйтүп жана алынган барабарсыздыктардын оң, сол жактарын суммалап,

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (7.8)$$

барабарсыздыгына ээ болобуз.

Ушул сыяктуу эле түгөйлөш маселенин $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$, $j = 1,2,...,n$

чектөөлөр системасынын барабарсыздыктарынын оң жана сол жактарын тиешелүү түрдө $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$ өзгөрүлмөлөрүнө көбөйтүп, суммалап төмөнкү барабарсыздыкты алабыз:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \tag{7.9}$$

(7.8) жана (7.9) – барабарсыздыктардын сол жактары бир эле туютманы бергендиктен, барабарсыздыктардын транзитивдүүлүк касиетинен талап кылынуучу барабарсыздыкты алабыз. □

Теорема (Оптималдуулуктун жетиштүү шарты). Эгерде өз ара түгөйлөш маселелердин $X = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ жана $Y = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ мүмкүн болгон чечимдери үчүн

$$F(X^*) = Z(Y^*) \tag{7.10}$$

барабардыгы орун алса, анда X^* - I баштапкы маселенин, Y^* - II түгөйлөш маселенин оптималдык чечимдери болушат.

□ X_1 - I баштапкы маселенин каалагандай мүмкүн болгон чечими болсун. (7.7) – негизги барабарсыздыктын негизинде $F(X_1) \leq Z(Y^*)$ га ээ болобуз. Бирок, X_1 - I маселенин каалагандай чечими болгондуктан, (7.10) – барабардыктын негизинде $F(X_1) \leq F(X^*)$, б.а. X^* - I маселенин оптималдык чечими экендиги алынат. Y^* - II түгөйлөш маселенин оптималдык чечими болушу ушул сыяктуу далилденет. □

Өз ара түгөйлөш маселелердин оптималдуулугунун жетиштүү шартынан башка да алардын чечимдеринин арасында маанилүү катыштар бар. Ар дайым эле өз ара түгөйлөш маселелердин түгөйүнүн бир учурда оптималдык чечимдери жашайбы, түгөйлөш маселелердин бири оптималдык мааниге ээ болуп, экинчисинин чечими жашабаган учурлар кездешеби деген суроолор туулат. Бул суроолорго төмөнкү теорема жооп берет.

Түгөйлөштүктүн биринчи негизги теоремасы. Эгерде өз ара түгөйлөш маселелердин биринин чечими жашаса, анда экинчисинин чечими да жашайт жана сызыктуу функциялардын оптималдык маанилери барабар болот:

$$F_{max} = Z_{min} \text{ же } F(X^*) = Z(Y^*). \tag{7.11}$$

Эгерде түгөйлөш маселелердин биринде сызыктуу функция чектелбеген болсо, анда экинчи маселенин шарты карама – каршылыктуу болот.

Теореманын биринчи бөлүгүнөн (7.10)-барабардык өз ара түгөйлөш маселелердин чечимдеринин оптималдуулугунун жетиштүү эле эмес, зарылдык шарты да экендиги келип чыгат. Теореманын экинчи бөлүгүн далилдейбиз.

□ Карама – каршысынан далилдейли. Баштапкы маселеде сызыктуу функция чектелбеген, б.а. $F_{max}=\infty$, ал эми түгөйлөш маселенин шарты карама –каршылыктуу болбосун, б.а. жок дегенде бир $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ мүмкүн болгон чечими жашасын. Анда (7.7) – - негизги барабарсыздыгынын негизинде $F(X)\le Z(Y)$ке ээ болобуз. Бул $F(x)$ функциясынын чектелбегендигине карама – каршы келет. Демек, баштапкы маселеде $F_{max}=\infty$ болгондо, түгөйлөш маселенин мүмкүн болгон чечимдери жашабайт. □

Түгөйлөштүктүн биринчи теоремасынын тууралыгын тастыктоочу мисалдар карайбыз.

1 – мисал.

Баштапкы маселе

$$\begin{cases}3x_1+5x_2\le 30,\\ 3x_1+2x_2\le 21,\\ 4x_1\qquad\le 24,\\ \qquad x_2\le 8,\end{cases}$$

$x_1\ge 0, x_2\ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X)=4x_1+5x_2\to max.$

Түгөйлөш маселе

$$\begin{cases}3y_1+3y_2+4y_3\quad\ge 4,\\ 5y_1+2y_2+\qquad y_4\ge 5,\end{cases}$$

$y_i\ge 0, i=1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$Z(Y)=30y_1+21y_2+24y_3+8y_4\to min.$

◊ Ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү I баштапкы маселе жана II түгөйлөш маселелердин оптималдык чечимдери буга чейин аныкталган жана I маселе үчүн $F_{max}=35$, II маселе үчүн $Z_{min}=35$ экендиги алынган (6.1-пункттагы 1- жана 2-мисалдар), б.а. түгөйлөштүктүн биринчи теоремасынын биринчи бөлүгү орун алат. ◊

Түгөйлөштүктүн биринчи теоремасынын экономикалык мааниси: $X=(x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ өндүрүү планы жана ресурстардын бааларынын $Y=(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ жыйындысы оптималдуу болот качан жана качан гана продукцияларды $c_1, c_2, ..., c_m$ бааларында сатуудан түшкөн пайда ресурстарды $y_1, y_2, ..., y_m$ бааларында сатып алууга кеткен чыгымдарга барабар болсо.

(7.7)-барабарсыздыктын негизинде түгөйлөш маселелердин каалагандай башка X жана Y пландарында продукцияларды сатуудан түшкөн пайда ресурстарга кеткен чыгымдардан кичине же барабар экендиги алынат.

1 – мисалда продукцияларды сатуудан түшкөн пайда F_{max} жана ресурстарга жумшалган чыгым Z_{min} - 35 а.б. га барабар. Калган бардык пландар үчүн $F_{max} \le 35$, $Z_{min} \ge 35$ болот.

Түгөйлөштүктүн биринчи теоремасынын экономикалык маанисин төмөнкүчө да талкуулого болот: ишканага $X=(x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ оптималдык пландагы продукцияны өндүрүү менен F_{max} пайда алуу жана $Y=(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ оптималдуу бааларында русурстарды сатуу менен Z_{min} минималдуу чыгымга барабар пайда алуунун айрымасы жок.

2 – мисал.

Баштапкы маселе	Түгөйлөш маселе
$\begin{cases} -y_1+2y_2 \ge 1, \\ -2y_1+y_2 \ge -1, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 8, \\ 2x_1+x_2 \le 2, \end{cases}$
$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$	$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
чектөөлөрүндө	чектөөлөрүндө
$Z(Y)=-8y_1+2y_2 \to min$.	$F(X)=x_1-x_2 \to max$.

I баштапкы маселеде сызыктуу функция чектелбеген ($Z_{min}=-\infty$), ал эми түгөйлөш маселенин шарты карама – каршылыктуу, б.а. биринчи негизги теорманын экинчи бөлүгүндөгү тыянак орун алат. **Эскертүү.** Жалпы учурда, теореманын экинчи бөлүгүнө тескери ырастоо орун албайт, б.а. баштапкы маселенин шартынын карама – каршылыктуулугунан түгөйлөш маселенин сызыктуу функциясынын чектелбегендиги келип чыкпайт.

3 – мисал. Өз ара түгөйлөш маселелер берилген.

Баштапкы маселе

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \le 5, \\ -2x_1 \quad \ge -7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = 3x_1 + 5x_2 \to max$.

Түгөйлөш маселе

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \ge 3, \\ -4y_1 \quad \ge 5, \end{cases}$$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$Z(Y) = 5y_1 + 7y_2 \to min$.

Эки маселенин да мүмкүн болгон чечимдери жашабайт, б.а. маселелердин шарттары карама – каршылыктуу. (Муну өз алдынча текшерүү сунушталат).

7.4. Түгөйлөштүктүн экинчи теоремасы

Өз ара түгөйлөш (7.1) –(7.3) – I маселе жана (7.4) – (7.6) – II маселелери берилсин. Эгерде маселелердин ар бирин симплекс метод менен чыгарсак, анда алдын ала аларды каноникалык формага келтирүүгө туура келет. I маселенин (7.2) – чектөөсүнө (б.а. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1,2,...,m$ системасына) $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i}, ..., x_{n+m}$ - m терс эмес өзгөрүлмөлөрүн кошуп, ал эми II маселесинин (7.5) – чектөөсүнө (б.а. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j, j = 1,2,...,n$ системасына) $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_{m+j}, ..., y_{n+m}$ - n терс эмес өзгөрүлмөлөрүн кемитип жазабыз.

Өз ара түгөйлөш маселелердин чектөөлөр системасы тиешелүү түрдө

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1,2,...,m, \tag{7.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - y_{m+j} = c_j, j = 1,2,...,n \tag{7.13}$$

көрүнүшүнө келет.

Маселелердин бириндеги баштапкы өзгөрүлмөлөр менен экинчисиндеги баланстык өзгөрүлмөлөрдүн ортосунда тиешелештикти орнотолу.

Баштапкы маселе											
Негизги өзгөрүлмөлөр						Баланстык өзгөрүлмөлөр					
x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+i}	$\ldots$	x_{n+m}
y_{m+1}	y_{m+2}	$\ldots$	y_{m+j}	$\ldots$	y_{m+n}	y_1	y_2	$\ldots$	y_i	$\ldots$	y_m
Баланстык өзгөрүлмөлөр						Негизги өзгөрүлмөлөр					
Түгөйлөш маселе											

Теорема. Өз ара түгөйлөш маселелердин биринин оптималдык чечиминдеги оң (терс эмес) компоненттерине экинчисинин оптималдык чечиминдеги нөлдүк компоненттери тиешелеш болот, б.а. каалагандай $i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$ үчүн эгерде $x_j^* > 0$ болсо, $y_{m+j}^* = 0$; эгерде $x_{n+i}^* > 0$ болсо, $y_i^* = 0$ жана ушул сыяктуу эле эгерде $y_i^* > 0$ болсо, $x_{n+i}^* = 0$; эгерде $y_{m+j}^* > 0$ болсо, $x_j^* = 0$ болот.

□ I баштапкы маселенин (7.12) – жана II түгөйлөш маселенин (7.13) – чектөөлөр системаларында баланстык өзгөрүлмөлөрдү баштапкы өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтабыз:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1,2,...,m, \tag{7.14}$$

$$y_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j, j = 1,2,...,n. \tag{7.15}$$

(7.14) – чектөөлөр системасындагы ар бир теңдемени тиешелүү түрдө $y_i \geq 0$ өзгөрүлмөлөрүнө көбөйтүп жана суммалап,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \tag{7.16}$$

барабардыгына ээ болобуз.

Ушул сыяктуу (7.15) – чектөөлөр системасын ар бир барабардыгын тиешелүү $x_j \geq 0$ өзгөрүлмөлөрүнө көбөйтүп жана суммалап,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.17}$$

барабардыгын алабыз.

(7.16)- жана (7.17) – барабардыктары өзгөрүлмөлөрдүн каалагандай мүмкүн болгон маанилеринде, аны менен бирдикте $x_j^*, x_{n+i}^*, y_i^*, y_{m+j}^*$ оптималдык маанилеринде да орун алат. Түгөйлөштүктүн биринчи теоремасынын негизинде $F(X^*)=Z(Y^*)$ же $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$ болгондуктан, (7.16)- жана (7.17) – барабардыктардын оң жактарындагы туюнтмалар белгилери менен гана айрымалана тургандыгы келип чыгат. Экинчиден (7.16)- жана (7.17) – барабардыктардагы $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} y_i$ жана $\sum_{j=1}^{n} x_j y_{m+j}$ туюнтмаларынын терс эмес экендиктеринен барабардыктардын оң жактарынын да терс эместиги келип чыгат.

Бул шарттар бир учурда өзгөрүлмөлөрдүн оптималдык маанилеринде оң жактары нөлгө барабар болгондо гана орун алат:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^* y_i^* = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j^* y_{m+j}^* = 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

Өзгөрүлмөлөрдүн терс эместигинен (7.18)-деги ар бир кошулуучунун нөлгө барабардыгы келип чыгат:

$$\begin{cases} x_{n+i}^* y_i^* = 0, i = 1,2,...,m, \\ x_j^* y_{m+j}^* = 0, j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Мындан теореманын тыянагы алынат. □

Натыйжа. Таблицада келтирилген тиешелештик өз ара түгөйлөш маселелердин оптималдык маанилери аныкталган учурда биринидеги негизги өзгөрүлмөлөргө экинчисиндеги негизги эмес өзгөрүлмөлөрдү тиешелештикке коюуга боло тургандыгын көрсөтөт.

Түгөйлөштүктүн экинчи негизги теоремасы. Түгөйлөш маселенин оптималдык чечиминин компоненттери баштапкы маселенин сызыктуу функциясынын оптималдык чечимдеги негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулушундагы тиешелеш өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттеринин абсолюттук чоңдугуна барабар.

1 - мисал. 7.3 төгү 1 – мисалдагы маселени карайлы.

◊ Мында өзгөрүлмөлөрдүн арасында тиешелештик төмөнкүчө болот:

Баштапкы маселе					
Негизги өзгөрүлмөлөр		Балaнстык өзгөрүлмөлөр			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4
Балaнстык өзгөрүлмөлөр		Негизги өзгөрүлмөлөр			
Түгөйлөш маселе					

Бул маселелердин ар бирин чечүүнүн акыркы кадамында төмөнкүлөр алынган:

I баштапкы маселеде $F = 35 - \frac{7}{9}x_3 - \frac{5}{9}x_4$. (7.19) $X^* = (5;3;0;0;4;5)$ оптималдык базистик чечимде $F(X^*) = F_{max} = 35$.

II түгөйлөш маселеде $Z = 35 + 4y_3 + 5y_4 + 5y_5 + 3y_6$. (7.20) $Y^* = \left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};0;0;0;0\right)$ оптималдык базистик чечимде $Z(Y^*) = Z_{min} = 35$.

Түгөйлөш маселенин оптималдык чечиминдеги $y_1^* = \frac{7}{9}, y_2^* = \frac{5}{9}, y_3^* = 0, y_4^* = 0, y_5^* = 0, y_6^* = 0$ компоненттери абсолюттук чоңдуктары боюнча $F = 35 - \frac{7}{9}x_3 - \frac{5}{9}x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 - 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2$ түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон (7.19) – сызыктуу функциядагы тиешелүү өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттерине барабар, ал эми баштапкы маселенин оптималдык чечиминдеги $x_1^* = 5, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 4, x_6^* = 5$ компоненттери абсолюттук чоңдуктары боюнча $Z = 35 + 5y_5 + 3y_6 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 4y_3 + 5y_4$ түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон (7.20) – сызыктуу функциядагы тиешелүү өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттерине барабар. ◊

Эскертүү. Эгерде өз ара түгөйлөш маселелердин биринде оптималдык чечим жалгыз болбосо, анда түгөйлөш маселенин оптималдык чечими кубулуучу болот.

Бул баштапкы маселенин оптималдык чечими жалгыз болбогон учурда сызыктуу функцияны оптималдык чечимдеги негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулушунда жок дегенде бир негизги өзгөрүлмө катышпагандыгынан келип чыгат.

Баштапкы маселени симплекс метод менен чыгарып, түгөйлөштүктүн теоремаларынын жардамында түгөйлөш маселенин оптималдык чечимин аныктоого болот.

2 - мисал.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ x_1 - 4x_2 \ge -24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

чектөөлөрүндө

$$F = -x_1 + 2x_2 \to max$$

маселесин симплекс метод менен чыгарып, түгөйлөштүктүн теоремаларынын жардамында түгөйлөш маселенин оптималдык чечимин тапкыла.

◊ Маселени симплекс метод менен чыгарып, акыркы кадамда $F = 10 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4$, б.а. $X^* = (4;7;0;0;6;6)$ оптималдык базистик чечимде $F_{max} = 10$ экендиги алабыз.

Маселелердин өзгөрүлмөлөрүнүн арасындагы тиешелештик жогорудагы мисалдагыдай болот.

Түгөйлөштүктүн биринчи теоремасынын негизинде $F_{max} = Z_{min} = 10$. Түгөйлөштүктүн экинчи теоремасынын негизинде сызыктуу функциянын туюнтулушундагы x_3түн коэффициентинен $y_1^* = 2/7$, ал эми x_4түн коэффициентинен $y_2^* = 3/7$ жана x_5, x_6, x_1, x_2 өзгөрүлмөлөрү анда катышпагандыктан, $y_3^* = y_4^* = y_5^* = y_6^* = 0$ экендигин, б.а. $Y^* = (2/7;3/7;0;0;0;0)$ оптималдык чечимин алабыз. Демек, түгөйлөш маселенин оптималдык чечими $Y^* = (2/7;3/7;0;0;0;0)$ жана мында $Z_{min} = 10$. ◊

Түгөйлөш маселени симплекс метод менен чыгарып, андан кийин түгөйлөштүктүн теоремаларынын негизинде баштапкы маселенин оптималдык мааниси аныктоо ыкмасы ***түгөйлөш симплекс метод*** деп аталат. Бул методду баштапкы маселенин биринчи базистик чечими мүмкүн болбогон чечим болгондо же андагы чектөөлөрдүн саны m өзгөрүлмөлөрдүн саны n ден чоң болгон учурда колдонууга болот.

7.5. Объективдүү шартталган баалар жана алардын мааниси

Түгөйлөш маселенин оптималдык чечиминдеги компоненттер баштапкы маселенин ***оптималдуу баалары*** **же** ***объективдүү шартталган баалар*** деп аталышат.

Бул баалардын маанисин түшүндүрүү үчүн ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү I маселени жана ага тутумдаш II маселени карайлы (7.3 төгү 1 – мисал). Бул маселелердин 7.4 төгү 1 – мисалда аныкталган оптималдык чечимдериндеги компоненттери төмөнкү таблицада келтирилген.

Баштапкы I маселенин оптималдык чечиминдеги компоненттер					
Продукциянын бирдиктеринин саны		Ресурстардын калдыктарынын бирдиктери			
P_1	P_2	S_1	S_2	S_3	S_4
$x_1^* = 5$	$x_2^* = 3$	$x_3^* = 0$	$x_4^* = 0$	$x_5^* = 4$	$x_6^* = 5$
$y_5^* = 0$	$y_6^* = 0$	$y_1^* = 7/9$	$y_2^* = 5/9$	$y_3^* = 0$	$y_4^* = 0$
Ресурстарга кеткен чыгымдардын сатылуу баасынан ашып кетүүсү		Ресурстардын объективдүү шартталган баалары (ресурстардын шарттуу баалары)			
Түгөйлөш II маселенин оптималдык чечиминдеги компоненттер					

Таблицадагы баштапкы I маселенин x_3, x_4, x_5, x_6 кошумча өзгөрүлмөлөрү (7.14) - туюнтмасына ылайык, S_1, S_2, S_3, S_4 ресурстарынын запастары b_i менен аларды сарптоолордун арасындагы айрымасы - ресурстардын калдыктарын берет, ал эми түгөйлөш II маселенин y_5, y_6 баланстык өзгөрүлмөлөрү (7.15) - туюнтмасына ылайык, продукциянын бирдигин өндүрүүдөгү ресурстарга жумшалган чыгымдар (ресурстардын сатылуу баасы менен эсептегенде) менен P_1, P_2 продукцияларынын c_j бааларынын арасындагы айырма чыгымдардын баадан ашып кетүүсүн көрсөтөт.

S_1, S_2 ресурстары оптималдуу план боюнча толук иштетилген ($x_3^* = 0, x_4^* = 0$) жана алардын объективдүү шартталган баалары нөлгө барабар эмес болушат $\left(y_1^* = \frac{7}{9}, y_2^* = \frac{5}{9}\right)$. S_3, S_4 ресурстары оптималдуу план боюнча толук иштетилбегендиктен ($x_5^* = 4, x_6^* = 5$) алардын объективдүү шартталган баалары нөлгө барабар болушат $\left(y_3^* = 0, y_4^* = 0\right)$.

Мына ошентип, объективдүү шартталган баалар ресурстардын тартыштыгынын деңгээлин аныкташат: оптималдык план боюнча тартыш ресурстар нөлдүк эмес бааларды, ал эми тартыш эместер нөлдүк бааларды алышат.

Баштапкы маселенин оптималдык планы боюнча продукциянын эки түрү тең өндүрүлүүгө тийиш $\left(x_1^* = 5, x_2^* = 3\right)$ жана чыгымдардын баадан ашып кетүүсү нөлгө барабар $\left(y_5^* = 0, y_6^* = 0\right)$. Эгерде чыгымдар баадан чоң болсо, мисалы P_2 продукциясында, б.а. $y_6^* > 0$ болсо, анда тиешелүү $x_2^* = 0$ болот. Бул учурда P_2 продукциясын өндүрүү сунушталбайт.

Демек, өндүрүштүн оптималдык планында продукциянын рентабелдүү же чыгашасыз гана түрлөрү кийирилет.

Ресурстардын объективдүү шартталган бааларынын сандык маанилерин түшүндүрүү үчүн төмөнкүдөй теореманы далилдейбиз.

Түгөйлөштүктүн үчүнчү теоремасы. Түгөйлөш маселенин оптималдык чечиминин компоненттери тишелеш өзгөрүлмөлөр боюнча $F_{max}(b_1, b_2, ..., b_m)$ сызыктуу функциясынын жекече туундуларына барабар, б.а.

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{7.21}$$

□ Теореманы ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү меселе жана ага түгөйлөш маселенин мисалында далилдейбиз. (7.6) – туюнтмасы боюнча сызыктуу функциянын мааниси

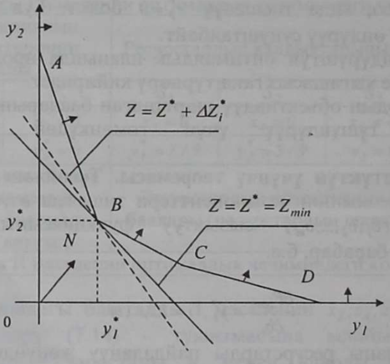
$$Z_{min} = Z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* .$$

i - ресурстун запасы b_i ни Δb_i жээтишердик кичине чоңдугуна өзгөртсөк, түгөйлөш маселенин оптималдык чечими өзгөрбөйт (1 – чиймеде эки өзгөрүлмөлүү учурда оптималдык чечим B чекитине туура келет), б.а. $y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*$ дер мурунку боюнча эле калат, ал эми Z функциясы өзгөрөт (1-чиймеде $Z = b_1 y_1 + b_2 y_2$ болгон учурда деңгээл сызыктын жантаю бурчу гана өзгөрөт). Мында ресурстарга сарпталган минималдык чыгымдардын өзгөрүүсү

$$\Delta Z_i = Z_{2i}^* - Z_{1i}^* = [b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + ... + (b_i + \Delta b_i) y_i^* + ... + b_m y_m^*] - (b_1 y_1^* + $$
$$+ b_2 y_2^* + ... + b_i y_i^* + ... + b_m y_m^*) = \Delta b_i y_i^*,$$

б.а. $\Delta Z_i = \Delta b_i y_i^*$. Ал эми түгөйлөштүктүн биринчи теоремасы боюнча $F_{max} = Z_{min}$ же $F^* = Z^*$, анда максималдуу пайда $\Delta F_{max} = \Delta F_i^* = \Delta Z_i^* = \Delta b_i y_i^*$ чоңдугуна чоңоёт, мындан

$$y_i^* = \frac{\Delta F_{max}}{\Delta b_i} \qquad (7.22)$$



1-чийме

Акыркы барабардык Δb_i нин жээтишердик кичине маанисинде туура болот, антпегенде деңгээл сызыктын жантаюсу жана Z^* сызыктуу функциясы минимумга башка бурчтук чекитте ээ болгондуктан оптималдык маани байкалаарлык өзгөрүүсү мүмкүн.

$\Delta b_i \to 0$ болгондо (7.22) -шарттан (7.21)-барабардык алынат. ❑

(7.22)-барабардыктан объективдүү шартталган баалар ресурс бир бирдикке өзгөргөндө тиешелүү продукцияны сатуудан түшкөн максималдуу пайданын канча акча бирдикке өзгөрө тургандыгын көрсөтөөрү келип чыгат.

1 - мисал. 7.3 төгү 1 – мисалдын объективдүү шартталган бааларынын маанисин карайлы.

◊ 7.4 төгү 1 – мисалда бул маселедеги ресурстардын объективдүү шартталган баалары төмөнкүдөй экендиги аныкталган: $y_1^* = 7/9; y_2^* = 5/9; y_3^* = y_4^* = 0$, б.а. S_1 же S_2 ресурстарынын запасы бир бирдикке көбөйгөндө (азайганда) максималдуу пайда тиешелүү түрдө $7/9$ жана $5/9$ а.б. ке көбөйөт (азаят). Ал эми S_3 же S_4 ресурстарынын запастарынын өзгөрүүсү менен өзгөрбөйт. ◊

Түгөйлөш баалар дайыма өзгөрүүчү өндүрүштүн шарттарындагы анализ жүргүзүүнүн жана чечимдерди кабыл алуунун каражаты катары колдонулат. Мисалы, ресурстардын объективдүү шартталган бааларынын жардамында оптималдуу шарттуу чыгымдарды жана өндүрүштүн жыйынтыктарын салыштырууга болот.

2 - мисал. 7.3 төгү 1 – мисалдын I маселесин чыгаруудан P_1 же P_2 продукцияларын өндүрүүнүн планы алынган жана мындан сырткары P_3 продукциясын да өндүрүү мүмкүндүгү бар экендиги аныкталган. P_3 продукциясынын бирдигин өндүрүү үчүн S_1 ресурсунан $a_{13} = 3$ бирдик, S_2 ресурсунан $a_{23} = 2$ бирдик, S_3 ресурсунан $a_{33} = 4$ бирдик, S_4 ресурсунан $a_{43} = 1$ бирдик сарпталат жана бир бирдигинин сатылуу баасы $c_3 = 3$ а.б. Планга кошумча P_3 продукцияны кошуудан пайда болобу? P_3 продукциясын өндүрүү рентабелдүү болуусу үчүн анын бирдигинин баасы кандай болуусу керек?

◊ Маселенин шартына P_3 продукциясын кошуп, маселени башынан чыгарууга туура келет. Бул болсо жаңы чыгымдарды талап кылат. Бирок, ресурстардын объективдүү шартталган баалары белгилүү болгондуктан, маселени чечүүнүн зарылчылыгы жок. P_3 продукциясынын бирдигин өндүрүүдө ресурстарга кеткен кошумча чыгымдар жана алардын сатылуу баасын салыштыралы. Биринчи чоңдук $a_{13}y_1^* + a_{23}y_2^* + a_{33}y_3^* + a_{43}y_4^* = 3\cdot 7/9 + 2\cdot 5/9 + 4\cdot 0 + 1\cdot 0 = 3{,}4$ а.б. продукциянын баасы $c_3 = 3$ төн чоң. Демек, планга бул продукцияны кошуу максатка ылайыктуу эмес. P_3 продукциясын өндүрүү рентабелдүү болуусу үчүн анын баасы $3{,}4$ а.б. дан кем болбоосу керек.◊

Объективдүү шартталган баалар ресурстардын каалагандай эле эмес, салыштырмалуу чоң эмес өзгөрүшүнүн эффекттин талкуулоого мүмкүндүк берет. Кескин өзгөрүүдө бааларды өндүрүштүн эффективдүүлүгүн анализдөөдө колдонууга мүмкүн болбой калат.

3 – мисал. 7.3 төгү 1 – мисалдагы түгөйлөш баалардын ар бир түрдөгү ресурстардын запастарынын өзгөрүүсүнө карата туруктуулук интервалдарын аныктагыла. Ресурстардын запастарынын ар бири 10 бирдикке а) жеке; б) бир убакта чоңойсо, бул баалар өзгөрөбү? Продукцияларды сатуудан түшкөн тиешелүү максималдуу пайданы тапкыла.

◊ S_1, S_2, S_3, S_4 ресурстарынын 30, 21, 24 жана 8 бирдикке барабар баштапкы запастары тиешелүү түрдө $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$ жана Δb_4 чоңдуктарына өзгөрүшсүн. Анда (7.6)-туюнтманын негизинде ресурстарга кеткен чыгымдар $Z = (30 + \Delta b_1)y_1 + (21 + \Delta b_2)y_2 + {}$ $+ (24 + \Delta b_3)y_3 + (8 + \Delta b_4)y_4$ тү түзөт.

y_1 жана y_2 өзгөрүлмөлөрүнүн оптималдык чечимдеги негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулуштары

$$\begin{aligned} y_1 &= 7/9 + (8/9)y_3 - (1/3)y_4 - (2/9)y_5 + (1/3)y_6, \\ y_2 &= 5/9 - (20/9)y_3 + (1/3)y_4 + (5/9)y_5 - (1/3)y_6 \end{aligned}$$

менен алмаштырып, өзгөртүп түзүүлөрлөн кийин

$$\begin{aligned} Z = &\left(35 + \frac{7}{9}\Delta b_1 + \frac{5}{9}\Delta b_2\right) + \left(4 + \frac{8}{9}\Delta b_1 - \frac{20}{9}\Delta b_2 + \Delta b_3\right)y_3 + \\ &+ \left(5 - \frac{1}{3}\Delta b_1 + \frac{1}{3}\Delta b_2 + \Delta b_4\right)y_4 + \left(5 - \frac{2}{9}\Delta b_1 + \frac{5}{9}\Delta b_2\right)y_5 + \qquad (7.23) \\ &\left(3 + \frac{1}{3}\Delta b_1 - \frac{1}{3}\Delta b_2\right)y_6 \end{aligned}$$

га ээ болобуз.

Эгерде $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$, б.а. ресурстардын запастары баштапкы маанилерине барабар болсо, анда Z функциясы оптималдык маанидеги негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулган (7.20)-туюнтмасы алынмак. Ресурстардын запастары өзгөрүшү менен объективдүү шартталган баалар өзгөрбөөсү, б.а. түгөйлөш маселенин $Y^* = (7/9;5/9;0;0;0;0)$ оптималдык чечими сакталышы үчүн (7.23)- туюнтмасындагы негизги эмес өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттери терс эмес болуусу керек, б.а.

$$\begin{cases} 4 + (8/9)\Delta b_1 - (20/9)\Delta b_2 + \Delta b_3 \geq 0, \\ 5 - (1/3)\Delta b_1 + (1/3)\Delta b_2 + \Delta b_4 \geq 0, \\ 5 - (2/9)\Delta b_1 + (5/9)\Delta b_2 \geq 0, \\ 3 + (1/3)\Delta b_1 - (1/3)\Delta b_2 \geq 0. \end{cases} \tag{7.24}$$

S_1 ресурсунун гана запасы өзгөрсүн, ал эми башка ресурстардын запастары өзгөрбөсүн: $\Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$. Анда (7.24)-туюнтмасынан

$$\begin{cases} 4 + (8/9)\Delta b_1 \geq 0, \\ 5 - (1/3)\Delta b_1 \geq 0, \\ 5 - (2/9)\Delta b_1 \geq 0, \\ 3 + (1/3)\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} \Delta b_1 \geq -4{,}5, \\ \Delta b_1 \leq 15, \\ \Delta b_1 \leq 22{,}5, \\ \Delta b_1 \geq -9 \end{cases}$$

келип чыгат. Мындан $-4{,}5 \leq \Delta b_1 \leq 15$ жана $30 - 4{,}5 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 30 + 15$ же $25{,}5 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 45$ ке ээ болобуз, б.а. S_1 ресурсунун запасы 25,5 менен 45 бирдиктин арасында болгондо объективдүү шартталган баалар өзгөрбөйт. Ушул сыяктуу эле $12 \leq b_2 + \Delta b_2 \leq 22\frac{4}{5}$, $20 \leq b_3 + \Delta b_3 < \infty$, $3 \leq b_4 + \Delta b_4 < \infty$ экендигин алууга болот. Мына ошентип, S_1 ресурсу 25,5 тен 45 бирдикке, S_2 ресурсу 22 ден $22\frac{4}{5}$ бирдикке чейин, S_3 ресурсу 20 дан кем эмес бирдикке, S_4 ресурсу 3 төн кем эмес бирдикке жекеден өзгөргөндө түгөйлөш маселенин оптималдык чечими өзгөрүүсүз калат.

Жогоруда айтылгандардан, S_2 ресурсунун запасын (21 бирдикке барабар) 10 бирдикке чоңойтуу анын объективдүү шартталган баасынын өзгөрүшүнө алып келет, ал эми S_1 (30 бирдик), S_3 (24 бирдик) жана S_4 (8 бирдик) ресурстарынын запастарын өзгөртүү бааларын мурунку бойдон калтыраары келип чыгат. Ресурстардын алынган оптималдуу бааларынын жардамында максималдуу пайданын тийиштүү ΔF_{max} өзгөрүшүн алуу мүмкүн эмес.

Эгерде ресурстардын запастары бир убакта өзгөрсө, анда объективдүү шартталган баалардын туруктуулугун изилдөө татаалданат. Анткени, бул учурда (7.24)-чектөөлөр системасынын чечимдеринин көптүгүн табууга туура келет. Бирок, дайыма эле ресурстардын запастарынын өзгөрүүсү (7.24)-системасын канааттандырышын текшерүүгө болот. Бул мисалдагы бардык ресурстардын запастары 10 бирдикке көбөйгөндө, б.а. $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 10$ болгондо (7.24)-системанын бардык барабарсыздыктары туура болот. Демек, түгөйлөш маселенин оптималдык чечими мурунку, б.а. $Y^* = (7/9; 5/9; 0; 0; 0; 0)$ боюнча калат. Ал эми максималдык пайданын өзгөрүшү (7.22)-туюнтманын негизинде

$$\Delta F_{max} = y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 + y_3^* \Delta b_3 + y_4^* \Delta b_4 = \frac{7}{9} \cdot 10 + \frac{5}{9} \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 13\frac{1}{3}$$

а.б. алынат. ◊

Объективдүү шартталган баалардын катыштары боюнча ресурстардын алмашуучулугунун нормаларын аныктоого болот. Түгөйлөш баалардын туруктуулук чегинде бул нормалар сакталгандагы алмаштыруу оптималдык пландын эффективдүүлүгүнө таасирин тийгизбейт.

4-мисал. 7.3-төгү 1-мисалда продукцияларды сатуудан түшкөн пайда өзгөрбөй тургандай S_1 жана S_2 ресурстарынын алмашуучулук нормасын аныктагыла.

◊ S_1 жана S_2 ресурстарынын объективдүү шартталган бааларынын катышын табалы: $y_1^* : y_2^* = (7/9) : (5/9) = 7 : 5$, б.а. жалпы пайданы максималдаштыруу үчүн S_1 ресурсунун кошумча 5 бирдиги S_2 ресурсунун 7 кошумча бирдигине тең күчтүү болот. Бул жыйынтык түгөйлөш баалардын туруктуулук чегинде туура болот. ◊

5-мисал. 7.3-төгү 1-мисалды түгөйлөш бааларды пайдаланып, ресурстардын запастары $\Delta b_1 = 4, \Delta b_2 = -2, \Delta b_3 = 1, \Delta b_4 = 4$ бирдиктерге өзгөргөндө чыгаргыла.

◊ Ресурстардын запастарынын өзгөрүшү $\Delta b_1 = 4, \Delta b_2 = -2, \Delta b_3 = 1, \Delta b_4 = 4$ түгөйлөш баалардын туруктуулук чегинде болгондуктан (алар (7.24)-шартты канааттандырышат), түгөйлөш маселенин чечими $Y^* = (7/9; 5/9; 0; 0; 0; 0)$ боюнча калат. Өзгөрүлмөлөрдүн арасындагы тиешелештиктин негизинде түгөйлөш маселенин оптималдык чечиминдеги өзгөрүлмөлөрдүн оң $y_1 = 7/9, y_2 = 5/9$ компоненттерине баштапкы маселенин нөлдүк $x_3 = 0, x_4 = 0$ маанилери тиешелеш болот. Ошондуктан баштапкы маселенин оптималдык чечиминин калган компоненттерин чектөөлөр системасын $x_3 = 0, x_4 = 0$ жана ресурстардын жаңы запастары $b_1' = 30 + 4 = 34, b_2' = 21 - 2 = 19, b_3' = 24 + 1 = 25, b_1' = 8 + 3 = 11$ үчүн чыгарып аныктайбыз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 34, \\ 3x_1 + 2x_2 = 19, \\ 4x_1 + x_5 = 25, \\ x_2 + x_6 = 11. \end{cases}$$

Мындан $x_1 = 3, x_2 = 5, x_5 = 13, x_6 = 6$ ээ болобуз. Сызыктуу функциянын тиешелүү максималдык мааниси $F_{max} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 37$ а.б.

Демек, өндүрүүнүн оптималдык $X^* = (3; 5; 0; 0; 13; 6)$ планындагы максималдуу пайда $F_{max} = 37$ а.б. ны түзөт. ◊

Көнүгүүлөр

7.1-7.3-маселелерди симплекс метод менен чыгаргыла жана алардын түгөйлөш маселелерин түзүп, чечимдерин түгөйлөштүктүн теоремаларынын негизинде тапкыла.

7.1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + x_2 \to max.$

7.2.

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$Z(Y) = 10y_2 - 3y_3 \to min.$

7.3.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

чектөөлөрүндө

$F(X) = x_1 + x_2 \to max$.

7.4.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$F(X) = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to max$

7.5. Төрт (А, Б, В, Г) түрдөгү продукцияны өндүрүү үчүн үч түрдүү (I, II, III) ресурс колдонулат. Маселенин калган шарттары төмөнкү таблицада берилген.

Ресурстар	Ресурстардын запасы, бирдик	Продукциянын бирдигине сырьенун сарпталуу нормасы, бирдик			
		А	Б	В	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	3	0	6	1
Продукциянын бирдигинен түшкөн пайда, а.б.		7,5	3	6	12

Сатуудан түшкөн пайда максималдуу боло тургандай продукцияны өндүрүүнүн планын тапкыла.

Түгөйлөш маселени экономикалык маанисин баяндоо менен жазгыла жана чечимин тапкыла. Ресурстардын объективдүү шарттлган бааларынын экономикалык маанисин түшүндүргүлө.

Ресурстардын ар биринин запасынын өзгөрүшүнө карата түгөйлөш баалардын туруктуулук интервалдарын аныктагыла.

I ресурстун запасы 40 б., III нүкү – 50 б. га көбөйгөндө, II ресурстун запасы 30 б. га азайгандагы продукцияларды сатуудан түшкөн кирешени аныктагыла. Бул өзгөрүүлөрдүн жеке жана биргеликтеги таасирин баалагыла.

Чыгымдардын баасын жана оптималдык план боюнча, продукциянын ар бири түрү боюнча пайданы салыштыргыла.

Бешинчи Д түрдөгү продукцияны кийирүүнүн максатка ылайыктуу болоорун баалагыла. Мында продукциянын бирдигине сырьелордун сарпталуу нормасы 2, 4, 2 б., ал эми пайда 15 а.б. га барабар.

VIII глава. ТРАНСПОРТТУК МАСЕЛЕ

8.1. Транспорттук маселенин экономика-математикалык модели

Сызыктуу программалоонун жекече учуру болуп транспорттук маселе саналат. Бул маселе төмөнкүчө коюлат.

m жөнөтүү пункттарында тиешелүү түрдө $a_1, a_2, \ldots, a_m$ өлчөмдөрүндө бир түрдүү жүк бар. Жүктөрдү талаптары тиешелүү түрдө $b_1, b_2, \ldots, b_n$ болгон n керектөө пункттарына жеткирүү керек. i- жөнөтүү пунктунан j- керектөө пунктуна жүктүн бирдигин ташууга кеткен $c_{ij}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$ чыгымдар белгилүү.

Жөнөтүү пункттарындагы бардык жүк бөлүштүрүлүп, керектөөчүлөрдүн талабы толук канааттандырыла тургандай жана ташууга кеткен суммардык чыгым минималдуу болгондой, ташуулардын оптималдуу планын аныктоо керек.

Жөнөтүүчүлөрдүн суммардык жүгү менен керектөөчүлөрдүн суммардык талабы барабар болсо, б.а.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{8.1}$$

барабардыгы аткарылса, транспорттук маселе *жабык типте*, ал эми

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{8.2}$$

болсо, *ачык типте* деп аталат.

x_{ij} аркылуу i- жөнөтүү пунктунан j- керектөө пунктуна жеткирилген жүктүн бирдигин санын белгилейли. Жабык транспорттук маселени карайлы. Транспоттук маселенин шарттарын бөлүштүрүү таблицасы түрүндө жазуу ыңгайлуу (1-таблица).

Таблицадагы торчолордун оң жаккы төмөнкү бурчунда i- жөнөтүү пунктунан j- керектөө пунктуна жеткирилген жүктүн бирдигинин саны $x_{ij}, i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n$, ал эми сол жаккы жогорку бурчунда жөнөтүү пункттарынан жүктүн бирдигин керектөө пункттарына жеткирүүгө кеткен c_{ij}, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ чыгымдары (транспорттук чыгымдар) көрсөтүлгөн.

Жекече учурда x_{11} - 1-жөнөтүү пунктунан 1-керектөө пунктуна жеткирилген жүктүн өлчөмүн, ал эми $c_{11}x_{11}$ көбөйтүндүсү x_{11} өлчөмдөгү жүктү жеткирүүнүн наркын берет.

1-таблица

a_i \ b_j		Керектөөчүлөрдүн талаптары					
		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
Жөнөтүүчүлөрдүн жүктөрүнүн өлчөмдөрү	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
	…	…	…	…	…	…	…
	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
	…	…	…	…	…	…	…
	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

$x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}$ суммасын карайлы. Бул 1-керектөө пунктуна жеткирилген жалпы жүктүн өлчөмүн берет. Талапты толук канааттандыруу шартын эске алсак, $x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}=b_1$ ге ээ болобуз. Ушул сыяктуу теңдемелерди калган $n-1$ пункттар үчүн да жазууга болот. Жыйынтыгында төмөнкү системаны алабыз

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+...+x_{m2}=b_2, \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{mn}=b_n. \end{cases} \tag{8.3}$$

$x_{11}+x_{12}+...+x_{1n}$ суммасы 1-жөнөтүү пунктунан ташылган жалпы жүктү берет, жүктөрдү толук бөлүштүрүү шартынан $x_{11}+x_{12}+...+x_{1n}=a_1$ барабардыгы алынат. Калган $m-1$ пункттар үчүн да ушул сыяктуу теңдемелерди алабыз.

Натыйжада

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \tag{8.4}$$

системасына ээ болобуз.

$c_{11}x_{11}$ көбөйтүндүсү 1-жөнөтүү пунктунан 1-керектөө пунктуна жеткирилген x_{11} өлчөмдөгү жүктү жеткирүүнүн наркын берээри белгилүү. Ушундай эле көбөйтүндүнү 1-жөнөтүү пунктунан 2-керектөө пунктуна жеткирилген x_{12} өлчөмдөгү жүк үчүн $c_{12}x_{12}$ түрүндө жазууга болот. Мындай көбөйтүндүлөрдүн баарын суммалап, m жөнөтүү пункттарынан n керектөө пункттарына жеткирүүлөрдүн жалпы суммардык наркын алабыз, б.а.

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \,. \tag{8.5}$$

Ошентип, маселе төмөнкүчө коюлат: (8.5)- сызыктуу функция минималдык мааниге ээ боло тургандай (8.3)-, (8.4)- системалардын $x_{ij}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$ терс эмес чечимдерин табуу талап кылынат.

Бул маселе кыскача:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\ldots,m, \tag{8.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\ldots,n, \tag{8.7}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n \tag{8.8}$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \tag{8.9}$$

түрүндө жазылат.

(8.9)-сызыктуу функция минималдык мааниге ээ болгон (8.6)-(8.7)- системанын терс эмес чечими маселенин *оптималдык чечими* деп аталат жана ал $X^* = (x_{ij})_{m \times n}$ матрицасы түрүндө белгиленет.

Транспорттук маселени симплекс метод менен чыгарууга болот. Бирок андагы өзгөрүлмөлөрдүн жана чектөөлөрдүн санынын көптүгү эсептөөлөрдү татаалдантат. Транспорттук маселеге жарамдуу симплекс методдун модификацияларынын бири болуп *потенциалдар методу* саналат. Жалпы учурдагыдай эле, чечүү кадамдар боюнча жүргүзүлөт жана ар бир кадамда өзгөрүлмөлөр негизги (базистик) жана негизги эместерге (эркүү) ажыратылат.

Транспорттук маселедеги негизги өзгөрүлмөлөрдүн саны r чектөөлөр системасынын рангына (чектөөлөр системасынын сызыктуу көз каранды эмес теңдемелеринин санына) барабар.

8.1-теорема. (8.6)-, (8.7)- системанын рангы r (8.1)-шартта $m+n-1$ ге барабар.

□ Алгач (8.1)-шартта (8.6)-, (8.7)- системанын теңдемелери сызыктуу көз каранды жана рангы $m+n-1$ ден чоң эмес экендигин белгилейбиз. Чындыгында системанын биринчи m теңдемесинин

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}a_i \tag{8.10}$$

суммасын ((8.6)-системанын теңдемелеринин суммасын) калган n теңдемесинин

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{8.11}$$

суммасы ((8.7)-системанын теңдемелеринин суммасын) менен салыштырабыз.

(8.1)-шартка ылайык, (8.10)- жана (8.11)-теңдемелердин оң жактары дал келет. Маселенин мүмкүн болгон бардык x_{ij} өзгөрүлмөлөрүнүн суммасы болгон (8.10)- жана (8.11)-лердын сол жактары да дал келет. Демек, (8.10)- жана (8.11)-теңдемелер дал келишет, б.а. чектөөлөр системасынын биринчи m теңдемесинин суммасы калган n теңдемесинин суммасына барабар: (8.6)-, (8.7)-системанын теңдемелери сызыктуу көз каранды.

Системанын r рангы $m+n-1$ ден кичине эмес экендигин далилдейбиз. Сызыктуу алгебрадан каалагандай сызыктуу теңдемелер системасынын кандайдыр бир k өзгөрүлмөсүн системанын калган өзгөрүлмөлөрү аркылуу сызыктуу туюнтууга мүмкүн болсо, анда бул системанын рангы k дан кичине эмес экендиги белгилүү.

Мисалы, 1-таблицанын 1-жолчо жана 1-мамычасындагы x_{ij} өзгөрүлмөлөрүн калган $x_{ij}, i = 2,3,...,m, j = 2,3,...,n$ өзгөрүлмөлөрү аркылуу туюнталы. Биринчи мындай туюнтулуштарды x_{11} өзгөрүлмөсүнөн башкаларына жазабыз. 1-жолчонун ар бир $x_{1j}, j = 2,3,...,n$ өзгөрүлмөлөрү үчүн тиешелүү мамычалар боюнча баланстык теңдемелерди пайдаланабыз:

$$x_{1j} = b_j - \sum_{i=2}^{m} x_{ij}. \tag{8.12}$$

Ушундай эле, 1-мамычанын ар бир $x_{i1}, i = 2,3,...,m$ өзгөрүлмөлөрү үчүн тиешелүү жолчолор боюнча баланстык теңдемелерди пайдаланабыз:

$$x_{i1} = a_i - \sum_{j=2}^{n} x_{ij}.$$

x_{11} үчүн туюнтманы жазуу үчүн, 1-жолчо боюнча баланстык теңдемени пайдаланалы:

$$x_{11} = a_1 - \sum_{j=2}^{n} x_{1j}. \tag{8.13}$$

(8.13)-теңдеменин оң жагына (8.12)-деги $x_{1j}, j = 2,3,...,n$ өзгөрүлмөлөрү үчүн туюнтмаларды коюп, x_{11} үчүн изделүүчү туюнтманы алабыз.

Ошентип, маселенин $m+n-1$ өзгөрүлмөсүн калган $mn-m-n+1$ өзгөрүлмөлөрү аркылуу туюнтууга болот, б.а. системанын рангы $r \geq m+n-1$.

(8.6)-,(8.7)-системанын рангы r үчүн алынган эки чектөөнү ($r \leq m+n-1$ жана $r \geq m+n-1$) салыштырып, $r = m+n-1$ экендигине ээ болобуз. □

Натыйжа. Жабык транспорттук маселенин негизги (базистик) өзгөрүлмөлөрүнүн саны $r = m+n-1$ ге барабар, мында m - жөнөтүүчүлөрдүн, n - керектөөчүлөрдүн саны.

Маселенин x_{ij} өзгөрүлмөлөрүнүн ар бир негизги жана негизги эмеске бөлүштүрүлүшүнө базистик чечим, демек, бөлүштүрүү таблицасынын толтурулушу туура келет. Мында бөлүштүрүүнү да *базистик* деп айтабыз. Б.а. бөлүштүрүү *базистик* деп аталат, эгерде толтурулган торчолорго туура келүүчү өзгөрүлмөлөрдү негизги катары алууга мүмкүн болсо. Базистик өзгөрүлмөлөргө туура келүүчү торчолорду *базистик*, ал эми эрктүү өзгөрүлмөлөргө туура келген торчолорду *бош* деп айтабыз. Анткени мындан ары биз базистик гана бөлүштүрүүлөрдү карайбыз жана «базистик торчо», «бош эмес торчо» терминдери бир эле маанини берет.

8.2. Баштапкы таяныч чечимди аныктоо

Баштапкы таяныч чечимди «түндүк-батыш бурч» методу менен аныктоону мисалда карайлы.

1-мисал. Маселенин шарты 2-таблицада берилген.

2-таблица

a_i \ b_j	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

3-таблица

a_i \ b_j	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7 / 130

x_{11} өзгөрүлмөсүнө максималдуу мүмкүн болгон маанини, б.а. таблицанын түндүк-батыш бурчунда жайланышкан (1,1) торчосуна максималдык мүмкүн болгон x_{11} жүгүн беребиз: $x_{11} = min\{30,70\} = 30$. Мында 1-жөнөтүүчүнүн жүгү толук таркатылат жана таблицанын 1-жолчосу мындан ары каралбайт. Бул жолчонун бош эмес торчосун сызык менен, ал эми бош торчолорун үзүк сызыктар менен сызып коёбуз. Таблицанын жаңы түндүк-батыш бурчу болгон (2,1) торчосуна максималдык мүмкүн болгон жүктү беребиз. 1-керектөөчү 1-жөнөтүү пунктунан 30 бирдик жүк алгандыгын жана ага дагы 40 бирдик жүк керектигин эске алып, $x_{21} = min\{190,40\} = 40$ экендигин алабыз. Мында 1-керектөөчүнүн талабы толугу менен канааттандырылат да, 1-мамыча мындан ары каралбайт ((2,1) торчосун сызык, калган бош торчолорду үзүк сызык менен сызып чыгабыз). Ушундай эле жол менен улантабыз. Жыйынтыгында баштапкы бөлүштүрүүнү алабыз (3-табл.).

Алынган бөлүштүрүүдө бош эмес торчолордун саны $m+n-1=3+4-1=6$ га, б.а. базистик өзгөрүлмөлөрдүн санына барабар. Бул кокустан эмес. Чындыгында, бул методдун ар бир кадамында (акыркыдан сырткары) кароодон бир жолчо же мамыча, акыркы кадамында жолчо да, мамыча да чыкты. Ошондуктан бош эмес торчолордун саны (кадамдардын саны) жолчолордун жана мамычалардын сандарынын суммасынан бирге кичине, б.а. $m+n-1$ ге барабар. Демек, баштапкы бөлүштүрүү базистик болуп саналат.

3-таблицадан

$$X_1 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 120 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 130 \end{pmatrix}$$

баштапкы бөлүштүрүүсүн алабыз.

Баштапкы таяныч чечимдеги жүктөрдү жеткирүүнүн жалпы наркы:

$$F(X_1) = 4 \cdot 30 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 120 + 7 \cdot 130 = 1690$$ ш.б. га

барабар.

Баштапкы таяныч планды ***минималдык чыгым*** методу менен да аныктоого болот.

2-мисал. 1-мисалдагы маселенин баштапкы бөлүштүрүүсүн тапкыла.

4-таблица

a_i \ b_j	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1 120	2	4
250	5	6	3	7

5-таблица

a_i \ b_j	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1 120	2 70	4
250	5	6	3	7

Таблицадан чыгымы эң кичине болгон торчолорду табабыз. Мындай торчо (2,2), чыгымы 1 ш.а.б. Ага максималдуу мүмкүн болгон $x_{22} = min\{190,120\} = 120$ жүктү беребиз. Натыйжада 2-керектөөчүнүн талабы толук канааттандырылат да, мындан ары 2-мамыча каралбайт (4-таблица). Таблицанын калган бөлүгүнөн эң кичине чыгымдуу торчолорду табабыз. Алар чыгымы 2 ш.а.б. га барабар (1,3) жана (2,3) торчолору. Алардын максималдуу мүмкүн болгон жүктөрүн салыштырабыз: $x_{13} = min\{30,150\} = 30$, $x_{23} = min\{70,150\} = 70$. (2,3) торчосунун максималдуу мүмкүн болгон жүгү чоң болгондуктан, ага 70 б. жүктү беребиз. Мында 2-жолчо кароодон чыгат (5-табл.).

Ушул сыяктуу таблицаны толтурууну улантып, төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$x_{13} = min\{30,150-70\} = 30$, $x_{33} = min\{250,150-100\} = 50$,
$x_{31} = min\{250-50,70\} = 70$, $x_{34} = min\{250-120,130\} = 130$ (6-табл.).

Мындай бөлүштүрүүдө

$$F(X_1) = 2 \cdot 30 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 70 + 5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 + 7 \cdot 130 = 1730 \text{ ш.б.}$$

чыгым жумшалат.

Эми бул методдорду колдонууда келип чыгуучу өзгөчө учурларга токтолобуз.

6-таблица

a_i \ b_j	70	120	150	130
30	4	7	2 / 30	3
190	3	1 / 120	2 / 70	4
250	5 / 70	6	3 / 50	7 / 130

8.2-теорема. Таблицаны толтуруунун ар бир кадамында бир бош эмес торчо алынса жана кароодон бир жолчо же бир мамыча (акыркы кадамдан сырткары) чыкса, анда бош эмес торчолорго тиешелүү өзгөрүлмөлөрдү базистик катары алууга болот.

□ Сызыктуу алгебрадан сызыктуу теңдемелер системасынын рангы r ге барабар жана системанын r өзгөрүлмөсүн калган өзгөрүлмөлөрү аркылуу туюнтууга мүмкүн болсо, анда бул r өзгөрүлмөнү негизги катары алууга болоору белгилүү. Теореманын шартынан бош эмес торчолордун саны $m+n-1$ ге, б.а. (8.6)-,(8.7)-системанын рангына барабар экендиги келип чыгат. Ошондуктан бош эмес торчолорго туура келүүчү өзгөрүлмөлөрдү бош торчолорго туура келүүчү өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтууга мүмкүн экендигин көрсөтсөк, теореманы далилдеген болобуз.

Биринчи $t,\ t=1,2,\ldots,m+n-2$ кадамдардагы бош эмес торчолордун өзгөрүлмөлөрүн биринчи t кадамдарда кароодон чыккан тиешелүү жолчолордун жана мамычалардын бош торчолорунун өзгөрүлмөлөрү аркылуу туюнтууга болот деп божомолдойбуз. $(t+1)$-кадамда (p,q)-торчо толтурулсун жана кароодон p- жолчо чыксын. x_{pq} өзгөрүлмөсүн p- жолчо боюнча баланстык теңдемеден туюнталы:

$$x_{pq}=a_p-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{n}x_{pj}\,.$$

Акыркы барабардыктын оң жагындагы өзгөрүлмөлөрдүн арасында биринчи t кадамдарда толтурулган бош эмес торчолордун өзгөрүлмөлөрү болсун. Анда аларды божомолдоо боюнча биринчи t кадамдарда кароодон чыккан жолчолордун жана мамычалардын бош торчолорунун өзгөрүлмөлөрү аркылуу туюнтууга болот. $(t+1)$-кадамда q- мамыча кароодон чыккан учурда x_{pq} өзгөрүлмөсүн q- мамыча боюнча баланстык теңдемеден туюнтуу керек. Мындай ой-жүгүртүүлөрдү удаалаш бөлүштүрүү таблицасын толтуруунун ар бир кадамы үчүн жүргүзүү керек. □

Бул теоремадан «түндүк-батыш бурч» жана минималдык чыгым методдорун колдонуунун ар бир кадамында кароодон бир жолчо же бир мамыча чыкса (акыркы кадамдан сырткары), анда базистик бөлүштүрүү (баштапкы таяныч чечим) алына тургандыгы келип чыгат.

Айрым учурларда баштапкы таяныч чечимди аныктоонун кандайдыр бир кадамында кароодон бир учурда жолчодо да, мамычада чыгуусу мүмкүн. Мындай учурларда таблицаны толтуруу 8.2-теореманын шарттарын канааттандырышы жана бөлүштүрүү базистик болушу үчүн кандай чара көрүү керектигин мисалда карайбыз.

3-мисал. Төмөнкү транспорттук маселенин баштапкы таяныч чечимин тапкыла.

7-таблица

b_j / a_i	70	80	50
50	1	3	2
100	4	5	7
50	6	2	4

8-таблица

b_j / a_i	70	80	50
50	1 / 50	7	2
100	3 / 20	1 / 80	2 / 0
50	5	6	3 / 50

◊ «Түндүк-батыш бурч» методун колдонолу. Биринчи кадамда 50 бирдик жүктү (1,1) торчосуна беребиз. Натыйжада 1-жөнөтүүчүнүн жүгү толук таркатылат да, кароодон 1-жолчо чыгат. Экинчи кадамда 20 бирдик жүктү (2,1) торчосуна беребиз. Мында 1-керектөөчүнүн талабы канааттандырылат жана кароодон 1-мамыча чыгат. Кийинки кадамда 80 бирдик жүктү (2,2) торчосуна беребиз. Мында кароодон 2-жолчо жана 2-мамыча чыгат. Андан ары улантсак, бош эмес торчолордун саны базистик өзгөрүлмөлөрдүн саны $m+n-1=3+3-1=5$ тен бирге кичине болот. Мындай бөлүштүрүү базистик болбойт. Базистик бөлүштүрүүнү алуу үчүн жасалма ыкманы пайдаланабыз.

Үчүнчү кадамды эки кадамга бөлөбүз. (2,2) торчосуна жүк берилгенден кийин, кароодон 2-мамычасын гана чыгарабыз. 2-жолчону кароодон чыгаруу үчүн нөлдүк (фиктивдүү) жүктү бул жолчонун каалагандай бош торчосуна, мисалы (2,3) торчосуна беребиз. Андан ары улантып, 8-таблицага ээ болобуз. ◊

8.3. Потенциалдар методу

Транспорттук маселени потенциалдар методу менен чечүү төмөнкү алгоритм боюнча жүргүзүлөт:

1. Баштапкы таяныч планды аныктоо.

2. Оптималдуулукка текшерүү. Оптималдуулук шарты орун албаса, 3-кадамга өтүлөт.
3. Учурдагы таяныч пландан башкасына өтүү. 2-кадамга өтүлөт.

Баштапкы таяныч планды аныктоонун методдору менен таанышпыз. Ошондуктан алгоритмдин 2-кадамына токтолобуз.

Оптималдуулукка текшерүү. Аныкталган баштапкы таяныч чечим потенциалдар методу боюнча оптималдуулукка төмөнкү критерийдин негизинде текшерилет: эгерде транспорттук маселенин таяныч чечими оптималдуу болсо, анда ага бош эмес торчолор үчүн $u_i + v_j = c_{ij}$, ал эми бош торчолор үчүн $u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ шарттарын канааттандыруучу u_i жана v_j - $m+n$ сандагы чыныгы сандары тиешелеш коюлат.

u_i жана v_j сандары *потенциалдар* деп аталышат. Бөлүштүрүү таблицасына потенциалдардын u_i мамычасы жана v_j жолчосу кошулат.

Потенциалдар бош эмес торчолор үчүн орун алган $u_i + v_j = c_{ij}$ теңдемесинен аныкталат. Мындай теңдемелердин жыйындысы $m+n$ белгисиздүү $m+n-1$ теңдемелер системасын берет. Потенциалдардын бирине эрктүү маани берип (адатта $u_1 = 0$ деп алынат), калгандарынын маанилерин бир маанилүү ушул системадан аныктоого болот.

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ чоңдугу бош торчолордун же базистик эмес өзгөрүлмөлөрдүн *баасы* деп аталат. Эгерде бардык баалар үчүн $\Delta_{ij} \le 0$ болсо, чечим оптималдуу. Эгерде баалардын жок дегенде бири үчүн $\Delta_{ij} > 0$ болсо, чечим оптималдуу болбойт. Бул учурда оптималдык чечимге учурдагы таяныч чечимден башкасына өтүү менен жетишүүгө болот.

8.2-пункттун 1-мисалында аныкталган таяныч планды оптималдуулукка текшерели. Таблицага потенциалдардын u_i мамычасын жана v_j жолчосун кошуп жазабыз.

$u_1 = 0$ деп алабыз. Биринчи мамыча менен биринчи жолчонун кесилишинде жайланышкан (1,1) бош эмес торчосун карайлы. Ал үчүн $u_1 + v_1 = c_{11} = 4$ барабардыгы орун алат. Мындан $v_1 = 4$ болот. Эми потенциалдарынын бири белгилүү болгон бош эмес торчону карайбыз.

9-таблица

b_j / a_i	70	120	150	130	u_i
30	4 / 30	7	2	3	0
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	-1
250	5	6	3 / 120	7 / 130	0
v_j	4	2	3	7	

(2,1) торчосу үчүн $u_2 + v_1 = c_{21} = 3$, мындан $u_2 = -1$ алынат. Калган бош эмес торчолор үчүн

$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} = 1,$$
$$x_{23} : u_2 + v_3 = c_{23} = 2,$$
$$x_{33} : u_3 + v_3 = c_{33} = 3,$$
$$x_{34} : u_3 + v_4 = c_{34} = 7.$$

$v_2 = 2, v_3 = 3$, $u_3 = 0$ жана $v_4 = 7$ маанилерин алабыз. Базистик эмес өзгөрүлмөлөр үчүн бааларды табалы:

$$x_{12} : \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 2 - 7 = -5,$$
$$x_{13} : \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 3 - 2 = 1,$$
$$x_{14} : \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 7 - 3 = 4,$$
$$x_{24} : \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 7 + (-1) - 4 = 2,$$
$$x_{31} : \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 4 - 5 = -1,$$
$$x_{32} : \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 0 + 2 - 6 = -4.$$

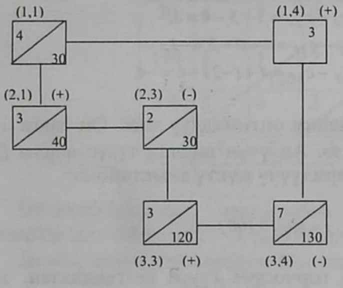
x_{13}, x_{14}, x_{24} өзгөрүлмөлөрүнүн баалары оң болгондуктан, чечим оптималдуу эмес.

Бир таяныч пландан экинчисине өтүү. Таяныч планда бош торчолордо оң баалардын болушу $(\Delta_{ij} > 0)$, алынган чечим оптималдуу эмес экендигин жана максаттуу функциянын маанисин минималдаштыруу үчүн башка таяныч чечимге өтүү керектигин берет. Мында жүктү бош эмес торчодон бош торчого берүү менен кайрадан бөлүштүрүү керек. Бул максатта максималдуу оң баага ээ болгон бош торчо үчүн туюк цикл түзүп алабыз. *Цикл* деп, башталышы жана аягы тандалган бош торчо, учтары бош эмес торчолор болгон горизонталдык жана вертикалдык байланышкан кесиндилердин удаалаштыгын айтабыз. Циклдин ар бир чокусу жолчо жана мамыча боюнча бир гана бош эмес торчо менен байланышуусу керек.

Циклдеги бош торчого (+) белгисин, андан кийин кезеги менен (-) жана (+) белгилерин коюп чыгабыз. (-) белги коюлган торчолордон минималдык жүккө ээ болгону тандалып алынат да, бул минималдык жүк (+) белгидеги торчолорго кошулат, ал эми (-) белгидеги торчолордон кемитилет. Тандалып алынган минималдык жүккө ээ болгон бош эмес торчо бош жана ага тиешелүү өзгөрүлмө базистик эмес болуп калат. Ал эми бош торчо минималдык жүккө ээ болгон бош эмес торчо, ага тиешелүү базистик эмес өзгөрүлмө базистик болуп калат. Эгерде минималдык жүк бир нече торчодон алынса, анда алардын каалаган бирин бош деп, ал эми калгандарын нөлгө барабар жүккө ээ болгон бош эмес торчо деп эсептейбиз.

Алынган жаңы таяныч план оптималдуулукка текшерилет ж.б.у.с. эсептөөлөр оптималдуулук шарты орун алганга чейин улантылат.

Мисал. Жогорудагы транспорттук маселенин оптималдык чечимин тапкыла.



1-чийме

◊ Учурдагы чечим оптималдуу эмес жана (1,4) торчосу максималдуу оң баага ээ болгондуктан, ал үчүн циклди түзөбүз. (+) жана (-) белгилерин коюп чыгабыз (1- чийме).

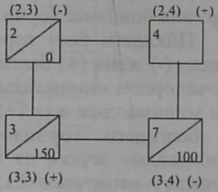
x_{14} өзгөрүлмөсүнө берилүүчү жүктү аныктайлы:

$$x_{14} = min\{x_{11}, x_{23}, x_{34}\} = \\ = min\{30, 30, 130\} = 30.$$

Эки өзгөрүлмөнүн мааниси бирдей болгондуктан, каалаган бирин мисалы, x_{11} ди базистик эмеске өткөрөлү. Мында (1,1) торчосу бош, (2,3) жүгү нөлгө барабар бош эмес торчо, ал эми (1,4) жүгү 30 га барабар бош эмес торчо болуп калат. Жаңы таяныч чечим 10-таблицада берилген.

10-таблица

a_i \ b_j	70	120	150	130	u_i
30	4	7	2	3 / 30	0
190	3 / 70	1 / 120	2 / 0	4	3
250	5	6	3 / 150	7 / 100	4
v_j	0	-2	-1	3	



2-чийме

Бул таяныч пландын оптималдуулугун текшерели. Потенциалдарды эсептеп, 10-таблицага жазып алабыз. Базистик эмес өзгөрүлмөлөр үчүн бааларды аныктайлы:

$$x_{11} : \Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 4 = -4,$$
$$x_{12} : \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + (-2) - 7 = -9,$$
$$x_{13} : \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + (-1) - 2 = -3,$$
$$x_{24} : \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 3 - 4 = 2,$$
$$x_{31} : \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 0 - 5 = -1,$$
$$x_{32} : \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 4 + (-2) - 6 = -4.$$

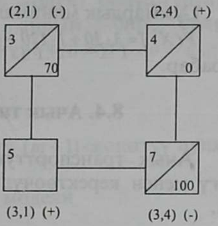
Оң баа болгондуктан, чечим оптималдуу эмес. Оң баага x_{24} базистик эмес өзгөрүлмөсү ээ. Ал үчүн циклди түзүп алалы (2-чийме). x_{24} өзгөрүлмөсүнө берилүүчү жүктү аныктайбыз:

$$x_{24} = min\{ x_{23}, x_{34} \} = min\{ 0, 100 \} = 0.$$

Минималдык жүк (2,3) торчосуна туура келгендиктен, x_{23} өзгөрүлмөсүн базистик эмес өзгөрүлмөгө өткөрөбүз. Нөлгө барабар жүк цикл боюнча кайрадан бөлүштүрүлөт. (2,3) торчосу бош, (2,4) жүгү нөлгө барабар бош эмес торчо болуп калат. Жаңы таяныч чечим 11-таблицада берилген.

11-таблица

$a_i \backslash b_j$	70	120	150	130	u_i
30	4	7	2	3 / 30	0
190	3 / 70	1 / 120	2	4 / 0	1
250	5	6	3 / 150	7 / 100	4
v_j	2	0	-1	3	



3-чийме

Таяныч планды оптималдуулукка текшеребиз. Ал үчүн потенциалдарды эсептеп, таблицага түшүрөбүз. Бош торчолор үчүн бааларды эсептейли:

$$\Delta_{11} = -2; \Delta_{12} = -7; \Delta_{13} = -3; \Delta_{23} = -2; \Delta_{31} = 1; \Delta_{32} = -2 .$$

Жалгыз гана оң баа x_{31} өзгөрүлмөсүнө туура келет жана ал үчүн цикл түзөбүз (3-чийме). $x_{31} = min\{70,100\} = 70$ болгондуктан, x_{21} базистик эмес өзгөрүлмөгө өтөт. Жаңы бөлүштүрүү 12-таблицада берилген.

12-таблица

$a_i \backslash b_j$	70	120	150	130	u_i
30	4	7	2	3 / 30	0
190	3	1 / 120	2	4 / 70	1
250	5 / 70	6	3 / 150	7 / 30	4
v_j	1	0	-1	3	

Оптималдуулукка текшеребиз. Бош торчолор үчүн бааларды эсептейли: $\Delta_{11} = -3; \Delta_{12} = -7; \Delta_{13} = -3; \Delta_{21} = -1; \Delta_{23} = -2; \Delta_{32} = -2$.

Демек, чечим оптималдуу. Мындан оптималдык бөлүштүрүү

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 120 & 0 & 70 \\ 70 & 0 & 150 & 30 \end{pmatrix}$$

экендигин алабыз.

Суммардык минималдык чыгым
$F(X^*)=3\cdot 30+1\cdot 120+4\cdot 70+5\cdot 70+3\cdot 150+7\cdot 30=1500$ ш.б. га барабар.

8.4. Ачык типтеги транспорттук маселе

Ачык транспорттук маселеде жөнөтүүчүлөрдүн суммардык жүгү менен керектөөчүлөрдүн суммардык талабы дал келбейт, б.а.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Мында:
а) эгерде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

болсо, анда керектөөчүлөрдүн талабы толук канааттандырылат. Ал эми жөнөтүүчүлөрдүн жүгүнүн айрым бир бөлүгү бөлүштүрүлбөй калат. Маселени чечүү үчүн талабы

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

га барабар фиктивдүү $(n+1)$-керектөөчү кийирилет.

Мындай маселенин математикалык модели

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n+1$$

чектөөлөрүндө

$$F(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow min;$$

б) эгерде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

болсо, анда жөнөтүүчүлөрдүн жүгү толук бөлүштүрүлүп, керектөөчүлөрдүн талаптарынын айрым бир бөлүгү канааттандырылбай калат. Маселени чечүү үчүн жүгү

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

барабардыгынан аныкталуучу фиктивдүү $(m+1)$-жөнөтүү пункту кийирилет.

Мындай маселенин математикалык модели

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,...,m+1, j = 1,2,...,n$$

чектөөлөрүндө

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

түрүндө жазылат.

Фиктивдүү жөнөтүүчүнү же керектөөчүнү кийирүү менен ачык типтеги транспорттук маселе туюк типке келтирилет жана аны буга чейин каралган алгоритм менен чечүүгө болот. Фиктивдүү жөнөтүүчүгө жана керектөөчүгө тиешелеш келүүчү нарктарды жетишээрдик чоң оң M санына же нөлгө барабар деп алабыз.

Мисал.

13-таблица

a_i \ b_j	30	40	60
40	7	8	6
60	6	5	10
50	4	3	9

14-таблица

a_i \ b_j	30	40	60	20
40	7	8	6	0
60	6	5	10	0
50	4	3	9	0

Бул маселеде (13-таблица) жөнөтүүчүлөрдүн суммардык жүгү 40+60+50=150, керектөөчүлөрдүн суммардык талабы 30+40+60=130. Маселе ачык типте. Талабы 150-130=20 бирдикке барабар фиктивдүү керектөөчүнү кийирип, жабык типтеги маселени алабыз (14-таблица). Маселе окурманга өз алдынча чечүүгө сунушталат.

Көнүгүүлөр

Төмөнкү бөлүштүрүү таблицасы менен берилген транспорттук маселелерди чыгаргыла.

8.1.

a_i \ b_j	45	15	20	20
25	9	5	3	10
55	6	3	8	2
20	2	8	4	8

8.2.

a_i \ b_j	45	15	22	20
25	7	5	3	1
55	6	3	8	2
22	3	8	4	7

8.3.

a_i \ b_j	10	11	8	6
12	10	3	5	8
5	5	7	6	4
18	1	4	3	7

8.4.

a_i \ b_j	70	40	30	60	50
20	4	2	5	7	6
110	7	8	3	4	5
120	2	1	4	3	2

8.5.

a_i \ b_j	40	35	30	45
46	4	3	2	7
34	1	1	6	4
40	3	5	8	1

8.6.

a_i \ b_j	15	25	8	12
25	9	5	3	10
18	6	3	8	2
12	2	8	4	8
15	4	3	2	8

IX глава. БҮТҮН САНДУУ СЫЗЫКТУУ ПРОГРАММАЛООНУН МОДЕЛДЕРИ

9.1. Бүтүн сандуу сызыктуу программалоо маселесинин коюлушу

Сызыктуу программалоо маселелерине алынып келинүүчү экономикалык маселелердин көпчүлүгүнүн чечиминин компоненттери мааниси боюнча бүтүн сандар менен туюнтулушу, б.а. бүтүн сандар болуусу керек. Аларга, мисалы, өзгөрүлмөлөрү бөлүнбөөчү продукциянын бирдигинин саны, багыттар боюнча бөлүштүрүүдөгү кемелердин саны, энергосистемадагы турбиндердин саны, эсептөө борборундагы компьютерлердин саны менен туюнтулган маселелер ж.б. кирет.

Бүтүн сандуу сызыктуу программалоо маселеси төмөнкүчө коюлат:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,...,m, \qquad (9.1)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n, \qquad (9.2)$$

$$x_j \text{ - бүтүн сандар} \qquad (9.3)$$

чектөөлөрүндө

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (9.4)$$

сызыктуу функциясы максималдык же минималдык мааниге ээ боло тургандай $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ чечимин (планын) тапкыла.

Классикалык транспорттук маселе жана транспорттук типтеги башка маселелер «автоматтык» түрдө маселенин чечимин бүтүн сандарда (эгерде шарттардын параметрлери бүтүн болсо) камсыз кылат. Бирок жалпы учурда сызыктуу программалоо маселесине (9.3)-бүтүндүүлүк шартын кошуу аны чечүүнү бир кыйла татаалдантат.

Бүтүн сандуу сызыктуу программалоо маселесин чечүү үчүн бир катар методдор колдонулат. Алардын эң жөнөкөйү - сызыктуу программалоонун кадимки методу. Оптималдык чечимдин компоненттери бүтүн эмес болсо, алар жакынкы бүтүн санга чейин тегеректелет. Бул методду жыйындын бир бирдиги жалпы жыйындын көлөмүнүн кичине бөлүгүн түзгөн учурда гана колдонууга болот. Тескери учурда тегеректөө оптималдык бүтүн чечимден алыс чечимге алып келүүсү мүмкүн. Ошондуктан атайын иштелип чыккан методдор колдонулат.

Бүтүн сандуу оптималдаштыруунун методдорун негизинен үч топко бөлүүгө болот: а) кесилиш методдору; б) комбинатордук методдор; в) жакындаштырылган методдор. Кесилиш методдоруна кененирээк токтолобуз.

9.2. Кесилиш методдору. Гомордун методу

Кесилиш методдорунда алгач маселе бүтүндүүлүк шарты эске алынбастан чыгарылат. Эгерде алынган план бүтүн сандуу болсо, анда маселе чечилет. Тескери учурда, маселенин чектөөлөрүнө

- сызыктуу болуш керек;
- табылган бүтүн эмес оптималдуу планды кесип өтүүсү керек;
- бир да бүтүн планды кесип өтпөөсү керек шарттарын канааттандыруучу жаңы чектөө кошулат.

Көрсөтүлгөн касиеттерге ээ болгон кошумча чектөө *туура кесилиш* деп аталат.

Андан ары маселе жаңы чектөөнү эске алуу менен чыгарылат. Мындан кийин зарылчылыгы болсо дагы жаңы чектөө кошулат ж.б.

Гомордун методу симплекс методго негизделген жана туура кесилишти түзүүнүн жеткиликтүү жөнөкөй методун пайдаланат.

(9.1)-(9.4) – бүтүн сандуу СП маселеси чектүү оптимумга ээ болсун жана аны симплекс метод менен чечүүнүн акыркы кадамында оптималдык чечимдин $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m$ негизги өзгөрүлмөлөрү $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+i}, ..., x_n$ негизги эмес өзгөрүлмөлөрү аркылуу төмөнкүчө туюнтулсун:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1,m+1}x_{m+1} - ... - \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2,m+1}x_{m+1} - ... - \alpha_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = \beta_i - \alpha_{i,m+1}x_{m+1} - ... - \alpha_{in}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \beta_m - \alpha_{m,m+1}x_{m+1} - ... - \alpha_{mn}x_n. \end{cases} \tag{9.5}$$

Мында $X^{*}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_i,...,\beta_m,0,0,...,0)$ (9.1)-(9.4) – маселенин оптималдуу чечими. Анын β_i компоненти бүтүн эмес болсун дейли. Бул учурда (9.5) - системанын i - теңдемесинен түзүлгөн

$$\{\beta_i\}-\{\alpha_{i,m+1}\}x_{m+1}-...-\{\alpha_{in}\}x_n\le 0 \qquad (9.6)$$

барабарсыздыгы туура кесилиштин бардык касиеттерине ээ.

Эскертүү. (9.6) – барабарсыздыктагы { } символу сандын бөлчөк бөлүгүн түшүндүрөт.

(9.1)-(9.4) – бүтүн сандуу СП маселесин Гомордун методу менен чечүүдө төмөнкүдөй алгоритм колдонулат:

1. (9.1)-(9.3) – маселеси бүтүндүк шарты эске алынбастан, симплекс метод менен чыгарылат. Эгерде оптималдуу пландын бардык компоненттери бүтүн сандар болушса, анда ал (9.1)-(9.4) – бүтүн сандуу СП маселесинин да чечими болуп саналат. Эгерде (9.1)-(9.3) – маселе чечимге ээ болбосо (б.а. чектүү оптимумга ээ эмес же маселенин шарты карама-каршылыктуу болсо), анда (9.1)-(9.4) – маселенин да чечими жашабайт.

2. Эгерде оптималдуу чечимдин компоненттеринин арасында бүтүн эместери болсо, анда алардын ичинен бүтүн бөлүгү эң чоң болгон компонент тандалып алынат жана ага тиешелүү (9.5)-системанын теңдемесине (9.6) – барабарсыздык түзүлөт.

3. (9.6) – барабарсыздыкка кошумча терс эмес бүтүн өзгөрүлмөнү киййрүү менен ага тең күчтүү болгон

$$\{\beta_i\}-\{\alpha_{i,m+1}\}x_{m+1}-...-\{\alpha_{in}\}x_n+x_{n+1}=0 \qquad (9.7)$$

теңдемесине өзгөртүп түзөбүз жана аны (9.1)-чектөөлөр системасына кошуп жазабыз.

4. Алынган кеңейтилген маселе симплекс метод менен чыгарылат. Эгерде табылган оптималдуу план бүтүн болсо, анда (9.1)-(9.4) – бүтүн сандуу маселе да чечилген болот. Антпесе алгоритмдин 2-пунктуна өтүлөт.

Эгерде маселе бүтүн сандарда чечимге ээ болсо, анда чектүү кадамдан кийин бүтүн сандуу оптималдуу план табылат.

Эгерде чечүү процессинде бош мүчөсү бүтүн эмес жана калган коэффициенттери бүтүн болгон теңдеме (негизги өзгөрүлмөлөр негизги эместер аркылуу туюнтулган) алынса, анда тиешелүү теңдеме бүтүн чечимге ээ эмес болот. Бул учурда берилген маселе да бүтүн сандуу оптималдуу чечимге ээ болбойт.

1-маселе. Фермер буудайды сорттоочу жабдык алуу үчүн 34 а.б. ажыратат. Жабдыктын жайгашуу аянты 60 кв.м.дан ашпоосу керек. Фермер эки түрдөгү: наркы 3 а.б. болгон, 3 кв. м. аянтты ээлеген, өндүрүмдүлүүгү бир сменада 2 т. буудайга барабар кубаты төмөнүрөөк A типтеги жана наркы 4 а.б. болгон, 5 кв. м. аянтты ээлеген, өндүрүмдүлүүгү бир сменада 3 т. буудайга барабар кубаттуураак B типтеги машиналарга буюртма бере алат.

Фермер B типтеги машинадан 8ден көп эмес сатып ала алат. Максималдуу жалпы өндүрүмдүүлүктү камсыз кылуучу жабдыктарды сатып алуунун оптималдуу планын аныктоо талап кылынат.

◊ x_1, x_2 аркылуу тиешелүү түрдө A жана B типтеги машиналардын санын, Z - аркылуу жалпы өндүрүмдүүлүктү белгилейли. Анда маселенин математикалык модели төмөнкүчө жазылат:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34, \\ \qquad\quad x_2 \le 8, \end{cases} \tag{9.8}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \tag{9.9}$$

$$x_1, x_2 \text{ - бүтүн сандар} \tag{9.10}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max. \tag{9.11}$$

x_3, x_4, x_5 терс эмес кошумча өзгөрүлмөлөрүн кийирип, маселени канондук формада жазып алабыз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad = 60, \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 \qquad = 34, \\ \qquad\quad x_2 \qquad\qquad + x_5 = 8, \end{cases} \tag{9.12}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,5\,.$$

Маселени бүтүн сандуулук шартын эске албай туруп, симплекстик таблицанын жардамында чыгаралы.

I кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр x_3, x_4, x_5; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_1, x_2. Биринчи симплекстик таблицаны толтурабыз.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_1$	$-x_2$	
x_3	60	3	5	60/5
x_4	34	3	4	34/4
x_5	8	0	1	8 ←
Z	0	-2	-3 ↑	

$X_1 = (0;0;60;34;8)$ - биринчи базистик чечим мүмкүн болгон чечим. Сызыктуу функциянын тиешелүү мааниси $Z_1 = 0$.

Акыркы жолчодо терс коэффициенттер бар. Алардын ичинен модулу боюнча чоң (-3). Демек, x_2 негизгиге өтөт. Минималдык баалоочу катышты табалы: $x_2 = \min\{60/5; 34/4; 8/1\} = 8$. Үчүнчү жолчо чечүүчү болот жана x_5 өзгөрүлмөсү негизги эмеске өтөт.

II кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр x_2, x_3, x_4; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_1, x_5. Жаңы симплекстик таблицаны толтурабыз.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_1$	$-x_5$	
x_3	20	3	-5	20/3
x_4	2	3	-4	2/3←
x_2	8	0	1	∞
Z	24	-2 ↑	3	

$X_2 = (0;8;20;2;0)$, $Z_2 = 24$. x_1, $x_1 = \min\{20/3; 2/3; \infty\} = 2/3$ өзгөрүлмөсүн негизгиге, x_4 тү негизги эмеске өткөрөбүз.

III кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр x_1, x_2, x_3; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_4, x_5.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_4$	$-x_5$	
x_3	18	-1	-1	
x_1	2/3	1/3	-4/3	
x_2	8	0	1	
Z	76/3	2/3	1/3	

$X_3=(2/3;8;18;0;0)$, $Z_3=76/3$. Акыркы X_3 базистик чечими (9.8)-(9.11)-маселеси үчүн оптималдуу, анткени акыркы жолчодо терс коэффициент жок.

Бирок X_3 чечими (9.10)-бүтүндүүлүк шартын канааттандырбайт. Бүтүн эмес x_1 компонентине туура келүүчү теңдемени жазалы

$$x_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_4+\frac{4}{3}x_5.$$

Ал үчүн (9.6)-барабарсыздык

$$x_1=\left\{\frac{2}{3}\right\}-\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4-\left\{-\frac{4}{3}\right\}x_5\le 0$$

көрүнүшүндө жазылат.

(9.5) – жана (9.6)-ларга ылайык бош мүчөнүн бөлчөк бөлүгүн теңдемеде кандай белгиде болсо, ошондой белгиде, негизги эмес x_4 жана x_5 өзгөрүлмөлөрүнүн коэффициенттеринин бөлчөк бөлүгүн карама-каршы белгиде алына тургандыгына көңүл бурабыз.

Бөлчөк бөлүктөрү $\left\{\frac{2}{3}\right\}=\left\{0+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, $\left\{\frac{1}{3}\right\}=\left\{0+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{-\frac{4}{3}\right\}=\left\{-2+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, анда акыркы барабарсыздык

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5\le 0 \qquad (9.13)$$

түрдө жазылат.

Кошумча бүтүн $x_6 \geq 0$ өзгөрүлмөсүн кийирип, (9.13)-барабарсыздыкка тең күчтүү

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5+x_6=0 \tag{9.14}$$

теңдемесин алабыз.

(9.14)-теңдеме баштапкы каноникалык маселенин (9.12)-чектөөлөр системасына кошулуп жазылат. Андан кийин кеңейтилген маселени симплекс метод менен кайрадан чыгарабыз. Мында кадамдардын санын азайтуу үчүн кошумча (9.14)-теңдемени маселени (бүтүндүүлүк шарты эске алынбаган) чечүүнүн акыркы кадамындагы симплекс таблицага кошуу сунушталат.

IV кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр x_1, x_2, x_3, x_6; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_4, x_5.

$X_4=(2/3;8;18;0;0;-2/3)$ базистик чечими – мүмкүн болбогон чечим. (Чектөөлөр системасына туура кесилишке туура келүүчү кошумча теңдемени кийирүүдөн кийин дайыма мүмкүн болбогон чечим алынаарын байкайбыз).

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_4$	$-x_5$	
x_3	18	-1	-1	∞
x_1	2/3	1/3	-4/3	∞
x_2	8	0	1	8
x_6	-2/3	-1/3	-2/3	1←
Z	76/3	2/3	1/3	
			↑	

Мүмкүн болгон чечимди алуу үчүн бош мүчөсү терс болгон жолчодон бош мүчөдөн сырткары терс коэффициентке туура келген негизги эмес өзгөрүлмөнү, б.а. x_4 же x_5 ти негизгиге өткөрөбүз. Негизгиге x_5 ти өткөрөлү.

V кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр x_1, x_2, x_3, x_5; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_4, x_6.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр		Баалоочу катыш
		$-x_4$	$-x_6$	
x_3	19	-1/2	-3/2	
x_1	2	1	-2	
x_2	7	-1/2	3/2	
x_5	1	1/2	-3/2	
Z	25	1/2	1/2	

$X_5=(2;7;19;0;1;0)$ базистик чечими мүмкүн болгон чечим. $Z_5=25$. Акыркы жолчодо терс коэффициент жок болгондуктан, X_5 - оптималдык чечим болот.

Ошентип, $X^*=X_5=(2;7;19;0;1;0)$ оптималдуу бүтүн чечимде $Z_{max}=25$, б.а. 25 т. га барабар максималдык өндүрүмдүүлүктү A типтеги машинадан 2ни жана B типтеги машинадан 7ни сатып алуу менен камсыздоого болот; бош калган аянт 19 кв. м., ажыратылган акчанын калдыгы 0 гө барабар, B типтеги 1 машина сатып алуу үчүн резервде (алтынчы компонент экономикалык мааниге ээ эмес). ◊

2-маселе. Жетиштүү көп санда 6 м. узундуктагы устундар бар. Устундарды 3 м. жана 1,5 м. узундуктагы эки түрдүү бөлүктөргө бөлүү керек. Ар бир түр боюнча алынган бөлүктөрдүн саны тиешелеш түрдө 31 жана 42 даанадан кем эмес болууга тийиш. Ар бир устунду көрсөтүлгөн бөлүктөргө бир нече ыкма менен бөлүүгө болот: 1) 3 м. дан эки бөлүккө; 2) 1,5 м.дан төрт бөлүккө; 3) 1,5 м. дан эки жана 3 м. дан бир бөлүккө. Ар бир ыкма боюнча бөлүнгөн түрдүү узундуктагы бөлүктөр минималдуу сандагы устундардан алына тургандай устундардын санын тапкыла.

◊ x_1, x_2, x_3 аркылуу 1-, 2- жана 3-ыкмалар боюнча бөлүнгөн устундардын санын белгилейли. Алардан 1,5 м. узундуктагы бөлүктөн $4x_2+2x_3$ д. жана 3 м. узундуктагы бөлүктөн $2x_1+x_3$ д. алууга болот. Устундардын жалпы санын Z аркылуу белгилесек, маселенин математикалык модели төмөнкүчө жазылат:

$$\begin{cases} 4x_2+2x_3 \geq 31, \\ 2x_1+x_3 \geq 42, \end{cases} \tag{9.15}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \tag{9.16}$$

$$x_1, x_2 \text{ - бүтүн сандар} \qquad (9.17)$$

чектөөлөрүндө

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min. \qquad (9.18)$$

Кошумча $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ өзгөрүлмөлөрүн кийирип, (9.15)-системаны ага тең күчтүү

$$\begin{cases} 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 31, \\ 2x_1 + x_3 - x_5 = 42, \end{cases} \qquad (9.19)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,5$$

системасына келтиребиз.

Алынган маселени бүтүндүүлүк шартын эске албастан симплекс метод менен чыгарып, акыркы, үчүнчү кадамда төмөнкү симплекс таблицаны алабыз.

III **кадам.** Негизги өзгөрүлмөлөр x_1, x_3; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_2, x_4, x_5.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр			Баалоочу катыш
		$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	
x_1	53/4	-1	1/4	-1/2	
x_3	31/2	2	-1/2	0	
Z	115/4	0	-1/4	-1/2	

Демек, $X_3\left(13\frac{1}{4};0;15\frac{1}{2};0;0\right)$ оптималдуу чечиминде $Z_{min} = 28\frac{3}{4}$. Оптималдык чечимдин x_1 жана x_3 компоненттери (9.17)-бүтүндүүлүк шартын канааттандырбайт. x_3 түн бүтүн бөлүгү чоң болгондуктан, ал үчүн (9.6)-кошумча чектөөсүн жазып алабыз:

$$\left\{15\frac{1}{2}\right\} - \{2\}x_3 - \left\{-\frac{1}{2}\right\}x_4 \leq 0.$$

Сандардын бөлчөк бөлүктөрүн табалы: $\left\{15\frac{1}{2}\right\} = \left\{15 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, $\{2\} = 0$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left\{-1 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. Анда акыркы барабарсыздыкты төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 \leq 0. \qquad (9.20)$$

(9.20)-барабарсыздыкка кошумча $x_6 \geq 0$ өзгөрүлмөсүн кийирип,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + x_6 = 0 \qquad (9.21)$$

теңдемесин алабыз. Бул теңдемени (9.15)- (9.18)-маселелесин чечүүдөгү үчүнчү симплекс таблицага кошобуз.

IV **кадам.** Негизги өзгөрүлмөлөр x_1, x_3, x_6; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_2, x_4, x_5.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр			Баалоочу катыш
		$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	
x_1	53/4	-1	1/4	-1/2	
x_3	31/2	2	-1/2	0	
x_6	1/2	0	-1/2	0	
Z	115/4	0	-1/4	-1/2	

Кеңейтилген бул маселени чыгарып, эки кадамдан кийин төмөнкүнү алабыз.

VI кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр x_1, x_3, x_4; негизги эмес өзгөрүлмөлөр x_2, x_5, x_6.

Базис	Бош мүчө	Негизги эмес өзгөрүлмөлөр			Баалоочу катыш
		$-x_2$	$-x_5$	$-x_6$	
x_1	13	-1	-1/2	1/2	
x_3	16	2	0	-1	
x_4	1	0	0	-2	
Z	29	0	-1/2	-1/2	

$X_6(13;0;16;1;0;0)$ оптималдуу чечиминде $Z_{min} = 29$. Оптималдуу чечимдеги негизги өзгөрүлмөлөр жана сызыктуу функция үчүн туюнтулуштарды жазалы:

$$\begin{cases} x_1 = 13 + x_2 + (1/2)x_5 - (1/2)x_6, \\ x_3 = 16 - 2x_2 + x_6, \\ x_1 = 1 + 2x_6, \end{cases} \qquad (9.22)$$

$$Z = 29 + (1/2)x_5 + (1/2)x_6.$$

Сызыктуу функциянын туюнтулушунда негизги эмес x_2 өзгөрүлмөсү катышкан жок. Бул бүтүндүүлүк шартын эске албаганда маселе чексиз көп чечимге ээ дегенди түшүндүрөт. $Z_{min} = 29$ мааниси $x_5 = x_6 = 0$ маанисинде жана x_2 нин чектөөлөр системасы мүмкүндүк берүүчү каалагандай $0 \le x_2 \le min\{\infty;8;\infty\} = 8$ же $0 \le x_2 \le 8$ маанисинде алынат. x_2нин бүтүндүгүн эске алсак, 0,1,…,8 маанилерин гана ала алат. Ошондуктан, маселе 9 оптималдуу чечимге ээ болот. Бул чечимдерди x_2нин маанилерин (9.22)-системага коюу менен аныктайбыз:

$$X_6^{(1)}(13;0;16;1;0;0), X_6^{(2)}(14;1;14;1;0;0), X_6^{(3)}(15;2;12;1;0;0), X_6^{(4)}(16;3;10;1;0;0),$$
$$X_6^{(5)}(17;4;8;1;0;0),\ X_6^{(6)}(18;5;6;1;0;0),\ X_6^{(7)}(19;6;4;1;0;0),\ X_6^{(8)}(20;7;2;1;0;0),$$
$$X_6^{(9)}(21;8;0;1;0;0).$$

Демек, бул бүтүн сандуу оптималдуу чечимдерде $Z_{min} = 29$. ◊

Гомордун методунун кемчилиги болуп, баштапкы эле өзгөрүлмөлөргө гана эмес, кошумча өзгөрүлмөлөргө да бүтүндүк шартынын коюлушу саналат.

9.3. Бутактар жана чек аралар методу

Бутактар жана чек аралар методу комбинатордук методдордун бири болуп эсептелет. Ал варианттарды иреттүү тандоодон жана алардын ичинен анык бир белги боюнча перспективдүүлөрүн гана карап, перспективдүү эместерин таштап жиберүүдөн турат.

Бул методдо мүмкүн болгон чечимдердин көптүгү кандайдыр ыкма менен камтылуучу көптүктөргө бөлүнөт жана алардын ар бири ушул эле ыкма менен камтылуучу көптүктөргө бөлүнөт. Процесс баштапкы маселенин бүтүн сандуу оптималдуу чечими алынганга чейин улантылат.

Z функциясынын максимумун издөөгө берилген 1 – маселе ((9.1)-(9.3)) симплекс метод менен (өзгөрүлмөлөрдүн бүтүндүк шарты эске алынбастан) чечилсин жана ар бир бүтүн өзгөрүлмөнүн төмөнкү жана жогорку чектери: $x_j : v_j \le x_j \le w_j$, $j = 1,2,...,n$, ал эми максаттуу функциянын төмөнкү чеги Z_0 (б.а. каалагандай X планы үчүн $Z(X) \ge Z_0$) белгилүү болсун. Аныктык үчүн, 1 – маселенин X^{**} оптималдуу планынын биринчи компонентасы x_1^* гана бүтүндүк шартын канааттандырбасын. Анда маселенин МБЧКсынан: $[x_1^*]<x_1^*<[x_1^*]+1$ аймагы чыгарылып ташталат. Мында $[x_1^*]$ – x_1^* санынын бүтүн бөлүгү. Натыйжада 1 – маселеден 2 - жана 3 – маселелер жаралат. 1 – маселенин (9.1) – системасына $v_1 \le x_1^* \le [x_1^*]$ чектөөсүн кошуу менен 2 – маселе, ал эми $[x_1^*]+1 \le x_1^* \le w_1$ чектөөсүн кошуу менен 3 – маселе түзүлөт. 2 – жана 3 – маселелерден турган эки тизмеге ээ болобуз.

Алардын бирин чыгарабыз. Алынган чечимге жараша маселелердин тизмеси кеңейет же кыскарат.

Эгерде 2 - жана 3 – маселелердин бирин чечүүдөн $Z(X^*) \le Z_0$ боло тургандай бүтүн эмес чечим алынса, анда тиешелүү маселе тизмеден чыгарылат. Эгерде $Z(X^*) \ge Z_0$ болсо, анда каралуучу маселеден эки маселе алынат.

Эгерде алынган X^* чечими үчүн бүтүндүк шарты жана $Z(X^*) > Z_0$ орун алса, анда Z_0 катары алынган бүтүн оптималдуу чечимдеги сызыктуу функциянын оптимуму алынат.

Процесс тизмедеги бардык маселелер чыгарылганга чейин улантылат.

Мисал. Маселени чыгаргыла.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$$Z = 3x_1 + x_2 \to \max.$$

◊ Сызыктуу функциянын төмөнкү чеги үчүн анын (0,0) чекитиндеги маанисин, б.а. $Z_0 = Z(0,0) = 0$ дү алабыз.

I этап. Маселени симплекс метод менен чыгарып, $Z_{max} = 13$, $X_1^*(4{,}5;0;0;1{,}5;0{,}5;4)$ кө ээ болобуз. x_1^* биринчи компоненти бүтүн эмес болгондуктан, чечимдердин көптүгүнөн бүтүн эмес оптималдуу x_1^* маанисин кармаган, б.а. $4 < x_1 < 5$ тилкени чыгарып таштайбыз. 1 – маселе 2- жана 3-маселелерге бөлүнөт:

2 - маселе

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2 \le 18, \\ x_1+2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

3 – маселе

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2 \le 18, \\ x_1+2x_2 \le 6, \\ 5 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

Маселелердин тизмеси: 2 жана 3. Сызыктуу функциянын төмөнкү чеги $Z_0 = 0$ өзгөрүүсүз калды.

II этап. Тизмедеги маселелердин каалаган бирин, мисалы 3 - маселени симплекс метод менен чыгаралы.

3 – маселенин шарты карама-каршылыктуу экендигин алабыз.

III этап. 2 - маселени симплекс метод менен чыгарабыз. $Z_{max} = 14/3$, $X_3^* = (4;2/3;0;2/3;0;10/3)$ экендигин алабыз. $Z(X_3^*) = 14/3 > Z_0 = 0$ болгону менен $Z_0 = 0$ сакталат, анткени X_3 планы бүтүн эмес. x_2^* - бөлчөк сан болгон үчүн чечимдердин көптүгүнөн $0 < x_2 < 1$ тилкесин чыгарып таштайбыз да, 2 – маселесин 4 - жана 5 – маселелерге бөлөбүз.

4 - маселе

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2 \le 18, \\ x_1+2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

5 – маселе

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2 \le 18, \\ x_1+2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 1 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

Маселелердин тизмеси: 4 жана 5. Төмөнкү чектин мааниси $Z_0 = 0$.

IV этап. 4 - маселени симплекс метод менен чыгарабыз. $Z_{max} = 12$, $X_4^* = (4;0;2;2;0;0)$дү алабыз. Маселе тизмеден чыгарылат, бирок X_4^* планы бүтүн жана $Z(X_4^*) > Z_0$ болгондуктан, Z_0 дүн мааниси $Z_0 = Z(X_4^*) = 12$ менен алмаштырылат.

V этап. 5 - маселени симплекс метод менен чыгарып, $Z_{max} = 12,25$, $X_5^* = (3,75;1;0;0,25;0,25;0;3)$ чечимин алабыз. $Z_0 = 12$ өзгөрүүсүз калат, анткени X_5^* планы бүтүн эмес. x_1^* - бөлчөктүү сан болгондуктан, чечимдердин көптүгүнөн $3 < x_1 < 4$ тилкесин чыгарып таштайбыз. 5 – маселе 6 - жана 7 – маселелерге бөлүнөт.

6 - маселе

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 1 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

7 – маселе

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 4 \le x_1 \le 4, \\ 1 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 - бүтүн сандар

чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

Маселелердин тизмеси: 6 жана 7. Төмөнкү чектин мааниси $Z_0 = 12$.

VI этап. Маселелердин бирин, мисалы 7 - маселени симплекс метод менен чыгаралы.

7 – маселенин шарты карама-каршылыктуу экендигине ээ болобуз.

VII этап. 6 – маселени симплекс метод менен чыгарабыз. $Z_{max} = 10,5$, $X_6^* = (3;1,5;1,5;0;0;0,5;2,5)$. $Z(X_6^*) = 10,5 < Z_0 = 12$ болгон үчүн маселе тизмеден чыгарылат.

Мына ошентип, тизмедеги бардык маселелер каралып бүттү жана баштапкы маселенин оптималдуу бүтүн сандуу планы $X^* = X_4^* = (4;0;2;2;0;0)$, ал эми сызыктуу функциянын оптимуму $Z_{max} = 12$. ◊

Эскертүү. Бутактар жана чек аралар методун колдонуу процессинде ар бир кийинки маселе мурункусунан бир гана барабарсыздык менен айырмаланаарын байкоо кыйын эмес. Ошондуктан ар бир кийинки маселени симплекс метод менен чечүү үчүн башынан баштоо шарт эмес. Ар бир кийинки маселени чечүүдө өзүнөн мурунку маселени чечүүнүн акыркы кадамындагы бир же эки «эски» чектөөнүн ордуна «жаңы» чектөөнү кошуп, андан ары улантуу максатка ылайыктуу.

Көнүгүүлөр

Бүтүн сандуу СП маселелеринин оптималдуу чечимдерин Гомордун (бутактар жана чек аралар) методу менен тапкыла.

9.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 – бүтүн сандар чектөөлөрүндө

$Z = 3x_1 + 2x_2 \to max$.

9.2.

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 – бүтүн сандар чектөөлөрүндө

$Z = 5x_1 + 7x_2 \to min$.

9.3.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 24, \\ -3x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 – бүтүн сандар чектөөлөрүндө

$Z = 2x_1 + x_2 \to max$.

9.4.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 – бүтүн сандар чектөөлөрүндө

$Z = 6x_1 + x_2 \to min$.

X глава. ОЮНДАР ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

10.1. Негизги түшүнүктөр

Экономикада, өндүрүштү башкарууда, согуштук иш-аракеттерде көпчүлүк учурларда анык эмес шарттарда жана тобокелчиликте чечимдерди кабыл алуу проблемасы кездешет. Мында аныксыздык атаандаштын аң-сезимдүү аракети менен жана ошондой эле чечимдин эффективдүүлүгүнө таасирин тийгизүүчү башка факторлор менен байланыштуу болуусу мүмкүн. Биринчи жак тарабынан кабыл алынуучу чечимдин эффективдүүлүгү экинчи жактын аракетинен көз каранды болгон жагдайлар *конфликттер* деп аталышат. Конфликт сөзсүз эле жактардагы антагонисттик карама-каршылыктардын болушун түшүндүрбөйт, бирок дайыма анык бир түрдөгү келишпестиктер менен байланышкан. Жактардын ар бири анык эмес шарттарда чечим кабыл алгандыктан, бири да абалды көзөмөлдөй албайт. Мисалы, бир ишканадагы өндүрүүнүн көлөмүн аныктоодо ошондой эле продукцияны өндүрүүчү башка ишкананын өндүрүү көлөмүн эске албай коюуга болбойт. Реалдуу шарттарда антагонизм катышпаган, бирок карама-каршылаш тенденциялар катышкан жагдайлар сейрек эмес кездешет. Мисалы, өндүрүштүн нормалдуу болуусу үчүн биринчиден түрдүү ресурстардын запасы болуусу керек, экинчиден запастардын ашыкча көбөйүшү сактоо менен байланышкан кошумча чыгымдарды пайда кылат. Каралган мисалдардагы конфликттүү жагдайлар адамдардын аң-сезимдүү аракеттери менен байланышкан. Практикада башка бир жактардын аң-сезимдүү карама-каршылыктарынан эмес, пландаштырылуучу иш чараны өткөрүүнүн шарттары боюнча жеткиликсиз маалымдуулуктан жаралуучу аныксыздыктар кездешет.

Конфликттүү жагдайларда чечимдерди кабыл алуунун математикалык моделдери менен алектенүүчү операцияларды изилдөөнүн бөлүгү *оюндар теориясы* деп аталат.

Оюндук схеманы экономикадагы көпчүлүк жагдайларга берүүгө болот. Мында утуштар тартыш ресурстарды жана өндүрүштүк фонддорду пайдалануунун эффективдүүлүгү, пайда, өздүк нарк ж.б.у.с. болуусу мүмкүн.

Оюндар теориясында конфликтүү жагдайлардын математикалык моделдери каралат. Мындай моделди *оюн* деп айтабыз. Реалдуу конфликттүү жагдайдан оюн так анык эрежеде жүргүзүлгөндүгү менен айрымаланат. Ошондуктан *оюн* деп, жактардын мүмкүн болгон аракеттерин (таза стратегияларын) аныктоочу эрежелердин жыйындысын айтууга болот. Жалпы учурда оюндун эрежелеринен жүрүштөрдүн удаалаштыгы, жактардын жүрүшү тууралуу маалымдуулуктун көлөмү жана оюндун жыйынтыгы, аягы аныкталат. Оюнда атаандаштардын ар бири өөрчүп бараткан конфликттүү жагдайда эң жакшы жыйынтыкты камсыз кылуучу чечимди кабыл алышат. Оюндун жыйынтыгы – бул аналитикалык же таблица түрүндө берилген *утуш* (*төлөм*) *функциясы* деп аталуучу кандайдыр бир функциянын мааниси. Эреже катары утушту же утулушту сан түрүндө берүүгө болот. Мис., утушту – 1, утулушту -0, тең чыгууну – 1/2 менен белгилөөгө болот.

Конфликтте (оюнда) катышкан жактар *оюнчулар* деп аталышат. Спорттук оюндарда оюнчулар жеке адамдар же командалар; экономикада фирмалар, ишканалар; согушта согушуучу жактар болуусу мүмкүн. Кээде оюнчу катары жаратылыш да алынат.

Түгөйлүү оюн деп, эки оюнчу катышкан оюнду айтабыз. Ал эми экиден көп оюнчу катышкан оюнду *көп оюнчу катышуучу оюн* деп айтабыз. Биз түгөйлүү гана оюндарды карайбыз.

Оюн *суммасы нөлгө барабар* же *антагонисттик* оюн деп аталат, эгерде оюнчулардын биринин утушу экинчисинин утулушуна барабар, б.а. оюндун толук берилиши үчүн алардын бирин гана көрсөтүү жетиштүү болсо. Эгерде оюнчулардын биринин утушу a, экинчисиники b болсо, анда *антагонисттик* оюн үчүн $b=-a$ болот. Ошондуктан, мисалы a ны гана кароо жетиштүү.

Эрежелерде каралган аракеттердин бирин тандоо жана жасоо оюнчунун *жүрүшү* деп аталат. Жүрүштөр өздүк жана кокустук болушу мүмкүн. *Өздүк жүрүш* – оюнчунун мүмкүн болгон аракеттедин бирин аң-сезимдүү тандоосу (мис., шахмат оюнундагы жүрүш). *Кокустук жүрүш* – кокустан тандалган аракет (мис., карта оюнундагы тандоо).

Оюнчунун *стратегиясы* деп, түзүлгөн жагдайга карата, анын ар бир өздүк жүрүшүндө аракетти тандоосун аныктоочу эрежелердин жыйындысын айтабыз. Адатта оюн процессинде оюнчу ар бир өздүк жүрүштү конкреттүү жагдайга карата тандайт. Бирок, түзүлүүчү каалагандай жагдайга жооп катары бардык чечимдерди алдын ала кабыл алып коюусу мүмкүн. Бул оюнчу тизме же программа түрүндө болгон, анык бир стратегияны тандап алды дегенди түшүндүрөт. Оюн *чектүү* деп аталат, эгерде оюнчулардын ар бири чектүү сандагы стратегияга ээ болсо, тескери учурда *чексиз* деп аталат.

Оюнчунун стратегиясы *оптималдуу* деп аталат, эгерде оюндун көп жолу кайталануусунда аттандашынын аракетинен көз карандысыз, ага мүмкүн болгон максималдык утушту камсыз кылса.

Оюдар теориясынын максаты ар бир оюнчунун оптималдык стратегиясын аныктоо болуп саналат. Оптималдык стратегияны тандоодо, ар бир оюнчу өзүнүн кызыгуусу боюнча алып караганда эстүү деп божомолдонот. Оюндар теориясынын негизги чектөөсү - утуштун эффективдүүлүк көрсөткүчү катары жалгыз болуусу. Бирок көпчүлүк реалдуу экономикалык маселелерде бирден көп эффективдүүлүк көрсөткүчтөрү болот. Ошондой эле, экономикада атаандаштардын кызыгуулары карама-каршы болбогон маселелер да кездешет. Биз оюндар теориясынын антагонисттик эмес жана көп оюнчу катышкан маселелерди чечүүгө арналган бөлүктөрүнө токтолбойбуз.

10.2. Антагонисттик матрицалык оюндар. Кепилденген жыйынтыктын минимакс принциби

Бизге буга чейин антагонисттик матрицалык оюндарда биринчи оюнчунун утушу экинчи оюнчунун утулушу менен толук аныкталаары белгилүү. Мындай оюндардагы керектүү маалыматтарды таблица түрүндө жазуу ыңгайлуу.

Эки оюнчу катышкан чектүү антагонисттик оюнду карайбыз. I жана II оюнчулардын ар бири чектүү мүмкүн болгон аракеттерге – таза стратегияларга ээ. Айталы, I оюнчу $A_1,...,A_m$ таза m стратегияларына, ал эми II оюнчу $B_1,...,B_n$ n таза стратегияларына ээ болсун. Мындай оюн $m \times n$ *ченемдүү матрицалык оюн* деп аталат. Оюн толук аныкталган болуусу үчүн таза стратегиялардын ар бир (A_i, B_j) түгөйүнө I оюнчунун утушу же II оюнчунун утулушу болгон a_{ij} санын тиешелештикке коюучу эрежени көрсөтүү керек. Эгерде оюн өздүк гана жүрүштөрдөн турса, анда таза стратегиялардын (A_i, B_j) түгөйүн тандоо, оюндун анык бир түрдөгү жыйынтыгын аныктайт. Эгерде оюнда кокустук жүрүштөр колдонулса, анда оюндун жыйынтыгы утуштардын орточо мааниси (математикалык күтүү) катары аныкталат. Таза стратегиялардын ар бир (A_i, B_j) түгөйү үчүн a_{ij} маанилери белгилүү болсо, утуш функциясынын таблицалык жазылышы болгон оюндун матрицасын жазууга болот. Элементтери A_i жана B_j стратегияларына таандык утуштар болгон $W = (a_{ij}), i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$ матрицасы *төлөм матрицасы* же *оюндун матрицасы* деп аталат. Мындай матрицанын жалпы жазылышы 1 – таблицада келтирилген.

$m \times n$ төлөм матрицалуу (1 – таблица) матрицалык оюндарды таза стратегияларда чечүүнү карайбыз. Каалагандай матрицалык оюндагы катышуучулардын максаты I оюнчуга максималдык утушту, ал эми II оюнчуга минималдык утулушту берүүчү эң ыңгайлуу стратегияларды тандоо болуп эсептелет.

1 - таблица

I \ II	B_1	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Оюнчулардын оптималдуу стратегияларын аныктоо үчүн: а) I оюнчунун $A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m$; б) II оюнчунун $B_1, B_2, ..., B_j, ..., B_n$ таза статегияларынын ичинен эң ыңгайлуусун аныктоо керек.

Айталы, жүрүш I оюнчуда болсун. Төлөм матрицасын анализдеп (1 – таблицаны кара), ал ар бир жолчодон ар бир $A_i, i = \overline{1,m}$ таза стратегиясы үчүн a_{ij} минималдык санын аныктайт жана аларды $\alpha_i, i = 1,2,...,m$ аркылуу белгилеп, төлөм матрицасынын акыркы мамычасына жазабыз (2 – таблицаны к.) :

$$\alpha_i = \min a_{ij}, i = 1,2,...,m. \tag{10.1}$$

2 - таблица

I \ II	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	α \ β

α_i сандары белгилүү болгондон кийин, I оюнчу α_i лардын максималдуусуна туура келген A_i^0 стратегиясын тандап алуусу керек.

Бул максималдык маанини α аркылуу белгилейбиз:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (10.2)$$

α чоңдугу – I оюнчунун өзүнө камсыз кылуучу кепилденген утушу *оюндун төмөнкү таза баасы* (максимин) деп аталат. Оюндун төмөнкү таза баасы α ны камсыз кылуучу стратегия, *максиминдик стратегия* деп аталат. Эгерде I оюнчу өзүнүн максиминдик стратегиясында турса, II оюнчунун каалагандай жүрүшүндө ал α дан кем утпайт жана ошону менен бирге өзүн күтүлбөстүктөн куткарат. Өз кезегинде II оюнчу өзүнүн утулушун же I оюнчунун утушун минималдаштырууга аракеттенет. Ошондуктан, ал ар бир мамыча боюнча ар бир B_j, $j = 1,2,...,n$ таза стратегиясы үчүн мүмкүн болгон максималдуу утушту аныктайт

$$\beta_j = \max_i a_{ij},\ j = 1,2,...,n, \qquad (10.3)$$

андан кийин β_j сандарынын минималдуусун аныктайт. Ага кандайдыр бир таза B_j стратегиясы туура келет. Аны *минимакстык* деп айтабыз.

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (10.4)$$

формуласынан аныкталуучу β саны *оюндун жогорку таза баасы* (минимакс) деп аталат.

Эгерде II оюнчу өзүнүн минимакстык стратегиясында турса, анда ага каалагандай учурда βдан көп эмес утулууга кепилдик болот.

Кошумча α_i мамычасынын жана β_j жолчосунун кесилишинде оюндун жогорку жана төмөнкү баалары α жана βларды жазабыз.

10.1-теорема. Матрицалык оюнда оюндун төмөнкү таза баасы оюндун жогорку таза баасынан ашып кетпей, б.а. $\alpha \le \beta$.

□ Аныктоо боюнча $\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij}$, $\beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij}$. Бул барабарсыздыктардан $\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} = \beta_j$га ээ болобуз. Мындан $\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j$ же $\alpha_i \le \beta_j$ келип чыгат. Бул барабарсыздык i жана j лардын каалагандай комбинациясы үчүн туура болот. □

Практикада $\alpha = \beta$ болгон оюндар кездешет. Мындай оюндар *ээр сымал чекиттүү оюндар* деп аталышат. Оюндун төмөнкү жана жогорку бааларынын $\alpha = \beta = \gamma$ жалпы мааниси *оюндун баасы*, ал эми бул мааниге тиешелеш A_i^* жана B_j^* стратегиялары *оптималдуу стратегиялар* деп аталышат. Оптималдуу стратегиялардын (A_i^*, B_j^*) түгөйү *матрицанын ээр сымал чекити* деп аталат. Анткени a_{ij}^* элементи бир учурда i-жолчо боюнча минималдуу жана j- мамычада максималдуу болуп эсептелет. Оптималдуу стратегиялар жана таза баа оюндун чечими болуп эсептелет.

Мисал. Төмөнкү төлөм матрицасы менен берилген оюндун таза стратегиялардагы чечимин тапкыла.

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	17	-23	-8	15	-9	-23
A_2	12	11	9	16	22	9
A_3	7	-10	7	14	-14	-14
A_4	3	7	-6	-4	5	-6
β_j	17	11	9	16	22	$\alpha=9$ / $\beta=9$

$\alpha = \beta = 9$ болгондуктан, төлөм матрицасы ээр сымал чекитке ээ. Оюндун таза баасы $\gamma = 9$. Оптималдуу стратегиялар I оюнчунун A_2 жана II оюнчунун B_3 стратегиялары болушат. Оптималдуу стратегиялардан каалагандай четтөө эки оюнчу үчүн да пайдасыз, анткени каалагандай жаңы стратегияга өтүү минимакс принцибинен баш тартууну түшүндүрөт. Бул болсо, оюнчуларды утулууга алып келет.

Мына ошентип, I оюнчу таза стратегияларын туура пайдалануу менен өзүнө α дан кем эмес утушту камсыз кылат, ал эми II оюнчунун таза стратегияларын туура пайдаланиуусу I оюнчунун β дан көп эмес утуусуна алып келет. Оюнчулардын ар бири максиминдик жана минимакстык стратегияларды тандоо менен, оюндагы өзүнүн абалын жакшыртууга жана алынуучу жыйынтыктардын атаандашынын аракеттеринен көз карандылыгын азайтууга аракеттенет.

10.3. Ээр сымал чекитке ээ болбогон оюндарды чыгаруу

Эгерде оюн ээр сымал чекитке ээ болсо, анда анын чечимин табуу минимакс принциби боюнча ушул чекитти табууга алынып келинет. Ээр сымал чекити жашабаган оюндардын чечими кандайча табылат деген суроо туулат. Мындай оюндарда $\alpha < \beta$ болот. Оюнчулардын ар биринин минимакстык стратегияларды колдонуусу α дан кем эмес утушту жана β дан көп эмес утулушту камсыз кылат. Бирок оюндун жогорку жана төмөнкү баасынын аралыгында оюнчулар өздөрүнүн утушун чоңойтууга (же утулушун азайтууга) аракет кылууга мүмкүн болгон кандайдыр аныксыздык аймак калып калат. Мындай чечимди издөө, эки же андан көп стратегияларды анык бир жыштыкта кокустан колдонуудан турган татаал стратегияны пайдаланууга алып келет. Стратегияларды тандоо кокустан жүргүзүлөт. Оюнчулардын стратегияларды кокустан тандашы *аралаш стратегия* деп аталат.

Аралаш стратегияны I оюнчу үчүн $X = (x_1, ..., x_m)$, II оюнчу үчүн $Y = (y_1, ..., y_n)$ түрүндө жазабыз. Мында x_i жана y_j - X жана Y аралаш стратегияларында $A_i, i = 1,2,...,m$ жана $B_j, j = 1,2,...,n$ таза стратегияларын колдонуунун ыктымалдуулуктары жана төмөнкү шарттарды канааттандырышат:

$$x_i \geq 0, y_j \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{10.5}$$

X жана Y ыктымалдуулуктарынын жыйынын I оюнчу үчүн m ченемдүү вектор жана II оюнчу үчүн n ченемдүү вектор катары кароого болот. Мына ошентип, I жана II оюнчунун аралаш стратегиялары, алардын таза стратегияларды колдонуусунун ыктымалдуулуктарынын толук жыйындысы болуп эсептелет. Аралаш стратегияда x_i (же y_j) чоңдуктарынын бирөөнүн гана 1 ге, башкаларынын нөлгө барабар болуусунан таза стратегия алынат, б.а. таза cтаратегия аралаш стратегиянын жекече учуру болуп эсептелет. I жана II оюнчулардын таза стратегияларды кокустан тандоо механизми аларды аралаш стратегиялардын чексиз көптүгү менен камсыздайт. I жана II оюнчу тиешелүү түрдө X жана Y аралаш стратегияларын колдонсун. Бул I оюнчу A_i стратегиясын x_i ыктымалдуулугу менен, ал эми II оюнчу B_j стратегиясын y_j ыктымалдуулугу менен пайдаланат дегенди билдирет. Оюнчулар өздөрүнүн таза стратегияларын кокустан жана бири-биринен көз карандысыз тандагандыктан, (A_i, B_j) түгөйүн тандоонун ыктымалдуулугу x_i жана y_j ыктымалдуулуктарынын көбөйтүндүсүнө, б.а. $x_i y_j$ га барабар. Аралаш стратегияларды колдонууда оюн кокустук мүнөзгө ээ жана I оюнчунун утушу (II оюнчунун утулушу) да кокустук чоңдук болуп калат. Ошондуктан, утуштун (утулуштун) орточосу (математикалык күтүүсү) жөнүндө гана сөз кылууга болот. Бул чоңдук X жана Y аралаш стратегияларынан функция болоору айкын жана ал

$$M(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{10.6}$$

формуласы боюнча эсептелет.

(10.6) – функция 3 – таблицасы менен берилген *оюндун төлөм функциясы* деп аталат.

3 – таблица

II / I	B_1	B_2	…	B_n	x_i
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	x_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	x_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	x_m
y_j	y_1	y_2	…	y_n	α / β

Буга чейин берилген төмөнкү жана жогорку таза баалар сыяктуу эле, аралаш стратегиялар үчүн да төмөнкү жана жогорку баа түшүнүктөрү кийирилет. Алар үчүн ошол эле α жана β белгилөөлөрү колдонулат. Эми a_{ij} утушунун ордуна $M(X,Y)$ орточо утушун, A жана B таза стратегияларынын ордуна X жана Y аралаш стратегияларын кароо керек.

Оюндун төмөнкү баасы деп, $\alpha = \max\limits_{X}\min\limits_{Y} M(X,Y)$ формуласынан аныкталуучу α санын, ал эми *жогорку баасы* деп $\beta = \min\limits_{Y}\max\limits_{X} M(X,Y)$ формуласынан аныкталуучу β санын айтабыз. I жана II оюнчулардын жана X^* жана Y^* оптималдуу аралаш стратегиялары үчүн ээр сымал чекиттүү оюндар сыяктуу эле

$$\alpha = \max_{X}\min_{Y} M(X,Y) = \min_{Y}\max_{X} M(X,Y) = \beta = M(X^*,Y^*) \qquad (10.7)$$

барабардыгы орунга ээ.

(10.7) – формуладан аныкталуучу $M(X^*,Y^*)$ чоңдугу *оюндун баасы* деп аталат жана аны γ аркылуу белгилейбиз.

Оптималдуу аралаш стратегияны колдонуу оюндун баасына барабар утушту алууга мүмкүндүк берет:

$$M(X,Y^*) \le M(X^*,Y^*) \le M(X^*,Y). \qquad (10.8)$$

Мындан $M(X^*,Y^*)$ ээр сымал чекитинде $M(X,Y)$ төлөм функциясы I оюнчунун X стратегиясы боюнча максимумга жана II оюнчунун Y стратегиясы боюнча минимумга ээ болоору келип чыгат.

Түздөн-түз практикалык колдонулушка ээ болгон төмөнкү теореманы далилдөөсү менен келтиребиз.

10.2 – теорема. $(a_{ij})_{m\times n}$ төлөм матрицасы жана γ баасы менен берилген оюнда, I жана II оюнчулардын $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ жана $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ аралаш стратегиялары оптималдуу болушу үчүн

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq \gamma, \quad j = 1,2,...,n, \tag{10.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq \gamma, \quad i = 1,2,...,m \tag{10.10}$$

барабарсыздыктардын аткарылуусу зарыл жана жетиштүү.

□ *Зарылдык шарты.* X^* жана Y^* оптималдуу аралаш стратегиялар болсун деп алып, (10.9)- жана (10.10)-барабарсыздыктардын орун алышын көрсөтөбүз.

(10.8)-барабарсыздыкты

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^* \leq \gamma \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j \tag{10.11}$$

көрүнүшүндө жазып алабыз. (10.11)-нин оң жагындагы каалагандай $Y = (y_1, ..., y_n)$ векторунун ордуна j- компонетасы 1 ге, калгандары 0 гө барабар болгон (0,…,1,…,0) векторун коюудан, (10.9)-барабарсыздык алынат. Чындыгында

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = 1 \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq \gamma$$

орун алат.

Аналогиялуу (10.11)-нин сол жагында каалагандай $X = (x_1, ..., x_m)$ векторунун ордуна i- компонетасы 1 ге, калгандары 0 гө барабар болгон (0,…,1,…,0) векторун коюудан, (10.10)-барабарсыздык алынат.

Жетиштүү шарты.(10.9)- жана (10.10)-барабарсыздыктар орун алат деп алып, X^* жана Y^* лардын оптималдуу аралаш стратегиялар экендиктерин, б.а. (10.11)-барабарсыздыктын аткарылуусун көрсөтөбүз. Алгач (10.9)-дан (10.11)-нин оң жагын келтирип чыгарабыз. $Y=(y_1,...,y_n)$ - каалагандай вектор болсун. (10.11)-нин оң жаккы суммасын өзгөртүп түзөлү:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i^*y_j=\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*\geq\sum_{j=1}^{n}y_j\gamma=\gamma\cdot\sum_{j=1}^{n}y_j=\gamma\cdot 1=\gamma.$$

Демек, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i^*y_j\geq\gamma$, б.а. (10.11)-нин оң жагы келип чыкты.

Сол жагы да ушул сыяктуу далилденет. Мына ошентип, (10.9)- жана (10.10)-лардан (10.11)-барабарсыздык келип чыгат. Бул болсо, X^* жана Y^* аралаш стратегияларынын оптималдуу экендиктерин берет. ❐

Ошентип, $\{X^*,Y^*,\gamma\}$ жыйындысы оюндун чечими болоорун текшерүү үчүн X^* жана Y^* лардын (10.9)- жана (10.10)-барабарсыздыктарды жана

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1,\ x_i\geq 0, y_j\geq 0 \qquad (10.12)$$

шарттарын канааттандыраарын текшерүү жетиштүү.

10.2 – теоремадан, эгерде I оюнчу X^* оптималдуу аралаш стратегиясын, ал эми II оюнчу каалагандай B_j таза стратегиясын пайдаланса, анда I оюнчу оюнчунун утушу оюндун баасы γ дан кем эмес болоору; эгерде II оюнчу Y^* оптималдуу аралаш стратегиясын, ал эми I оюнчу каалагандай A_i таза стратегиясын пайдаланса, анда II оюнчунун утулушу γ дан чоң эмес болоору келип чыгат.

Оптималдуу аралаш стратегияга нөлдөн айрымалуу ыктымалдуулуктары менен катышкан таза стратегиялар *активдүү стратегиялар* деп аталышат.

Оюндарды чечүүдө чоң мааниге ээ болгон активдүү стратегиялар жөнүндөгү теореманы келтирели.

10.3-теорема. Эгерде оюнчулардын бири өзүнүн оптималдуу аралаш стратегиясында турса жана экинчиси өзүнүн активдүү стратегияларынын чегинен чыкпастан кайсы гана стратегиясын колдонбосун, биринчисинин утушу өзгөрүүсүз калат жана оюндун баасына барабар болот.

□ $\{X^*, Y^*, \gamma\}$ - $(a_{ij})_{m\times n}$ төлөм матрицасы менен берилген оюндун чечими жана I оюнчу r, ал эми II оюнчу s сандагы активдүү стратегияларга ээ болсун. Оюнчулардын активдүү стратегиялары биринчи боло тургандай, таза стратегияларын кайрадан номерлеп чыгабыз. Анда $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*, 0, ..., 0)$, $\sum_{i=1}^{r} x_i^* = 1$ жана $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_s^*, 0, ..., 0)$, $\sum_{j=1}^{s} y_j^* = 1$. Эгерде I оюнчу X^* оптималдуу стратегиясын, ал эми II оюнчу таза стратегияларын пайдаланса, анда 10.2-теоремасынын негизинде

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} x_i^* \ge \gamma, \; j = 1, 2, ..., s \qquad (10.13)$$

ке ээ болобуз.

Эгерде оюнчулар X^* жана Y^* оптималдуу стратегияларын пайдаланышса, анда I оюнчунун утушу оюндун баасына барабар, б.а.
$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_i^* y_j^* = \gamma$. (10.13)-нү эске алып, бул сумманы өзгөртүп түзөлү:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{j=1}^{s} y_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} x_i^* \ge \sum_{j=1}^{s} y_j^* \cdot \gamma = 1 \cdot \gamma = \gamma. \qquad (10.14)$$

(10.14)-катыш (10.13)-барабарсыздык теңдештик болгондо гана орун алат.

Мындан каалагандай $Y = (y_1, ..., y_s, 0, ..., 0)$ аралаш стратегиясы үчүн $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_i^* y_j^* = \gamma$ барабардыгынын аткарылышы келип чыгат.□

Оюндун ченеми жогорулаган сайын аны чечүү татаалданат. Оюнду чечүүнү оюндун ченемин, б.а. төлөм матрицасынын ченемин төмөндөтүү менен жеңилдетүүгө болот. Ал үчүн матрицадан бирин-бири кайталоочу жана пайдасыз стратегияларды сызып таштоо керек.

Эгерде $\Phi = (a_{ij})$ төлөм матрицасынын кандайдыр бир жолчосунун (мамычасынын) бардык элементтери башка бир жолчосунун (мамычасынын) тиешелүү элементтерине барабар болсо, анда бул жолчолорго (мамычаларга) тиешелүү стратегиялар *бирин-бири кайталоочу* стратегиялар деп аталышат.

Эгерде $\Phi=(a_{ij})$ төлөм матрицасынын кандайдыр бир A_i стратегиясына туура келген жолчонун бардык элементтери башка бир жолчонун тиешелүү элементтеринен чоң эмес болсо, анда A_i стратегиясы *пайдасыз* деп аталат.

Эгерде $\Phi=(a_{ij})$ төлөм матрицасынын кандайдыр бир B_j стратегиясына туура келген мамычанын бардык элементтери башка бир мамычанын тиешелүү элементтеринен кичине эмес болсо, анда B_j стратегиясы *пайдасыз* деп аталат

Мисал. Төмөнкү төлөм матрицасы менен берилген оюнду жөнөкөйлөткүлө.

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	20	25	18	15	19
A_2	17	16	9	14	11
A_3	15	12	14	24	16

◊ Матрицадан II оюнчу өзүнүн утулушун азайтууга аракеттенгендиктен, ал үчүн B_5 стратегиясы B_3 стратегиясына караганда пайдасыз (B_5тин каалагандай элементи B_3түн элементтеринен кичине эмес) экендиги көрүнүп турат. Ошондуктан, B_5 стратегиясы оптималдуу стратегияда катышпайт жана чечимди тандоодо аны карабай коюуга болот. Ошондой эле, B_1 стратегиясы да B_3 стратегиясына караганда пайдасыз.

Ушул сыяктуу, I оюнчу үчүн A_2 стратегиясы A_1 стратегиясына караганда пайдасыз, анткени II оюнчу кайсы гана стратегиясын колдонбосун ага кичине утушту берет. Башкаларына салыштырмалуу пайдасыз болгон A_2, B_1 жана B_5 стратегияларын сызып таштап, 2×3 өлчөмдүү матрицага ээ болобуз (4 – табл.). ◊

4-таблица

I \ II	B_2	B_3	B_4
A_1	25	18	15
A_3	12	14	24

10.4. Матрицалык оюндарды чечүүнүн методдору

Активдүү стратегиялар жөнүндөгү теорема чоң практикалык мааниге ээ. Ал оюн ээр сымал чекитке ээ болбогон учурда анын оптималдуу стратегияларын аныктоонун конкреттүү моделдерин берет.

Матрицалык оюндарды аралаш стратегияларда чечүүнүн методдорун карайлы.

10.4.1. 2×2, 2×n жана m×2 оюндарын чыгаруу

Чектүү оюндун эң жөнөкөй учуру болгон 2×2 ченемдүү оюнду карайлы. Мындай оюндарда ар бир оюнчу эки гана таза стратегияга ээ. Эгерде 2×2 оюну ээр сымал чекитке ээ болсо, анда оптималдуу чечим бул чекитке тиешелүү таза стратегиялардын түгөйү болот.

5 - таблица

I \ II	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

2×2 оюну ээр сымал чекитке ээ эмес, б.а. $\alpha \neq \beta$ (5 – табл. к.) болсун. Оюнчулардын оптималдуу $X^* = (x_1^*, x_2^*), Y^* = (y_1^*, y_2^*)$ аралаш стратегияларын жана оюндун баасы γны табуу талап кылынат.

Аларды аныктоо үчүн активдүү стратегиялар жөнүндөгү теореманы пайдаланабыз. Ээр сымал чекитке ээ болбогон 2×2 оюнунда оюнчулардын стратегияларынын ар бири активдүү болоору айкын. Ошондуктан, I оюнчу оптималдуу аралаш стратегиясын пайдаланса, II оюнчунун аракетинен көз карандысыз утушу оюндун баасы γ га барабар болот.

I оюнчу A_1 стратегиясын x_1 ыктымалдуулугу менен, ал эми A_2 стратегиясын x_2 ыктымалдуулугу менен пайдаланат. Эгерде II оюнчу B_1 стратегиясын колдонсо, анда I оюнчунун утушу

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = \gamma$$

теңдемесинен аныкталат.

Эгерде II оюнчу B_2 стратегиясын колдонсо, анда I оюнчунун утушу өзгөрбөйт жана

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = \gamma$$

барабардыгынан аныкталат.

$x_1 + x_2 = 1$ экендигин эске алып, X_A^* оптималдуу стратегиясын жана оюндун баасы γ ны аныктоо үчүн төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \gamma, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \gamma, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases} \qquad (10.15)$$

Системаны чечип,

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$
$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (10.\ 16)$$

оптималдуу стратегиясын жана

$$\gamma = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$
$$x_i \geq 0, y_j \geq 0 \qquad (10.17)$$

оюндун баасын алабыз.

Активдүү стратегиялар жөнүндөгү теореманы II оюнчунун Y_B^* оптималдуу стратегиясын издөөгө колдонуп, каалагандай таза $A(A_1$ же $A_2)$ стратегиясында II оюнчунун орточо утулушу оюндун баасы γ га барабар экендигине ээ болобуз, б.а.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \gamma, \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \gamma, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases} \qquad (10.18)$$

Анда $Y_B^*(y_1^*, y_2^*)$ оптималдуу стратегиясы

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (10.19)$$

формулаларынан аныкталат.

1-мисал. Төмөнкү төлөм матрицасы менен берилген оюндун чечимин тапкыла:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

◊ $\alpha = 3, \beta = 5$, анда $\alpha \neq \beta$. Демек, оюн ээр сымал чекитке ээ эмес. Чечимди аралаш стратегиялардан издейбиз. Теңдемелер системасы I оюнчу үчүн

$$\begin{cases} 6x_1^* + 3x_2^* = \gamma, \\ -2x_1^* + 5x_2^* = \gamma, \\ x_1^* + x_2^* = 1, \end{cases} \qquad (10.20)$$

II оюнчу үчүн

$$\begin{cases} 6y_1^* - 2y_2^* = \gamma, \\ 3y_1^* + 5y_2^* = \gamma, \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases} \qquad (10.21)$$

көрүнүштө болот.

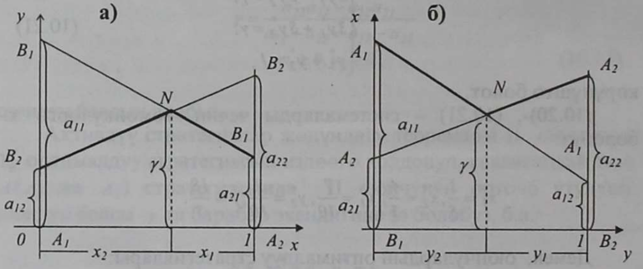
(10.20)-, (10.21) – системаларды чечип, төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$x_1^* = \frac{1}{5}, x_2^* = \frac{4}{5}, y_1^* = \frac{7}{10}, y_2^* = \frac{3}{10}, \gamma = \frac{18}{5}.$$

Демек, оюнчулардын оптималдуу стратегиялары:

$$X^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), Y^* = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right). \text{ ◊}$$

2×2 оюнун (5 – табл. к.) аралаш стратегияларда чечүүнүн ***геометриялык талкууланышына*** токтололу. Ал үчүн xOy координаталар системасынын абсцисса огунда $[A_1, A_2]$ бирдик кесиндисин ченеп коёбуз. Кесиндинин учтарынан абсцисса огуна перпендикулярларды жүргүзөбүз жана аларга I оюнчунун утуштарын белгилейбиз (1,а-чийме). Ордината огуна дал келген сол перпендикуляр A_1 стратегиясына туура келет, мында $x_1 = 1, x_2 = 0$. Ал эми оңу A_2 стратегиясына туура келет, ал үчүн $x_1 = 0, x_2 = 1$. Эгерде II оюнчу B_1 стратегиясын пайдаланса, анда I оюнчунун A_1 жана A_2 таза стратегияларын пайдалангандагы утуштары тиешелүү түрдө a_{11} жана a_{21} лерди түзөт. Бул чекиттерди тиешелүү перпендикулярда белгилеп, A_1 перпендикулярында B_1 жана A_2 перпендикулярында B_1 эки чекитин алабыз. Бул чекиттерди B_1B_1 түз сызыгы менен бириктиребиз. B_1B_1 кесиндисинин каалагандай чекитинин ординатасы I оюнчу A_1 жана A_2 стратегияларын тиешелүү түрдө x_1 жана x_2 ыктымалдуулуктары менен колдонгондогу анын утушуна барабар. Эгерде II оюнчу B_2 стратегиясын пайдаланса, I оюнчунун утуштары тиешелүү түрдө a_{12} жана a_{22} болот. Ушундай эле түзүүлөрдөн, B_2B_2 кесиндисин алабыз.



1 - чийме. *Оюндун чечиминин геометриялык талкууланышы*

B_2B_2 кесиндисинде жаткан чекиттердин ординаталары, II оюнчу B_2 стратегиясын, ал эми I оюнчу A_1 жана A_2

стратегияларын тиешелүү түрдө x_1 жана x_2 ыктымалдуулуктары менен колдонгондогу анын орточо утушуна барабар. X_A^* оптималдуу стратегиясын табуу үчүн I оюнчунун утушунун төмөнкү чегин, б.а. B_2NB_1 сынык сызыгын аныктайбыз (1,а – чиймеде жоон сызык менен белгиленген). Бул сынык сызыкта I оюнчу каалагандай стратегиясын колдонгондогу анын минималдык утуштары жатаары айкын. Оптималдуу чечим I оюнчунун утушу эң чоң мааниге ээ болгон N чекитине туура келет. N чекитинин ординатасы оюндун баасы γ га барабар. Бул чекиттин абсцисса огундагы проекцияларына $X_A^*=(x_1^*,x_2^*)$ оптималдуу стратегиясы тиешелеш болот. Мында X_A^* чекитинен $[A_1,A_2]$ бирдик кесиндисинин учтарына чейинки аралыктар оптималдуу аралаш стратегиядагы I оюнчунун A_1 жана A_2 стратегияларынын x_1 жана x_2 ыктымалдуулуктарына барабар. II оюнчунун $Y_B^*=(y_1^*,y_2^*)$ оптималдуу стратегиясы ушул сыяктуу эле аныкталат. Ал үчүн төлөм матрицадагы I жана II оюнчулардын орундарын алмаштыруу, б.а. матрицаны транспонирлөө жана утуштун төмөнкү чегинин максимумунун ордуна жогорку чегинин минимумун табуу керек (1,б-чийме). Транспонирленген матрица 6-таблицада келтирилген.

6-таблица

II \ I	A_1	A_2
B_1	a_{11}	a_{21}
B_2	a_{12}	a_{22}

Таблицадагы берилгендер боюнча II оюнчунун утушунун жогорку чегин аныктайбыз.

2-мисал. Оюндун чечимин тапкыла.

I \ II	B_1	B_2	α_i
A_1	0,4	0,9	0,4
A_2	0,6	0,3	0,3
β_j	0,6	0,9	

стратегияларын тиешелүү түрдө x_1 жана x_2 ыктымалдуулуктары менен колдонгондогу анын орточо утушуна барабар. X_A^* оптималдуу стратегиясын табуу үчүн I оюнчунун утушунун төмөнкү чегин, б.а. B_2NB_1 сынык сызыгын аныктайбыз (1,а – чиймеде жоон сызык менен белгиленген). Бул сынык сызыкта I оюнчу каалагандай стратегиясын колдонгондогу анын минималдык утуштары жатаары айкын. Оптималдуу чечим I оюнчунун утушу эң чоң мааниге ээ болгон N чекитине туура келет. N чекитинин ординатасы оюндун баасы γ га барабар. Бул чекиттин абсцисса огундагы проекцияларына $X_A^* = (x_1^*, x_2^*)$ оптималдуу стратегиясы тиешелеш болот. Мында X_A^* чекитинен $[A_1, A_2]$ бирдик кесиндисинин учтарына чейинки аралыктар оптималдуу аралаш стратегиядагы I оюнчунун A_1 жана A_2 стратегияларынын x_1 жана x_2 ыктымалдуулуктарына барабар. II оюнчунун $Y_B^* = (y_1^*, y_2^*)$ оптималдуу стратегиясы ушул сыяктуу эле аныкталат. Ал үчүн төлөм матрицадагы I жана II оюнчулардын орундарын алмаштыруу, б.а. матрицаны транспонирлөө жана утуштун төмөнкү чегинин максимумунун ордуна жогорку чегинин минимумун табуу керек (1,б-чийме). Транспонирленген матрица 6-таблицада келтирилген.

6-таблица

II \ I	A_1	A_2
B_1	a_{11}	a_{21}
B_2	a_{12}	a_{22}

Таблицадагы берилгендер боюнча II оюнчунун утушунун жогорку чегин аныктайбыз.

2-мисал. Оюндун чечимин тапкыла.

I \ II	B_1	B_2	α_i
A_1	0,4	0,9	0,4
A_2	0,6	0,3	0,3
β_j	0,6	0,9	

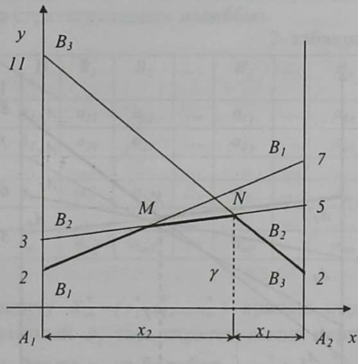
Чыгаруунун методун мисалдарда карайлы.

3 - мисал. Оюндун чечимин тапкыла.

II / I	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	11
A_2	7	5	2

◊ Оюн ээр сымал чекитке ээ эмес. Оюндун графигин түзүп алабыз (3 - чийме).

Утуштун төмөнкү чеги B_1MNB_3 сынык сызыгы. N чекити оптималдуу чекит болуп эсептелет. Бул чекитте B_3B_3 жана B_2B_2 кесиндилери кесилишкендиктен, II оюнчунун активдүү стратегиялары B_2 жана B_3 болушат. (10.16)-, (10.17)- жана (10.19) – формулалардан оюндун чечими $X_A^* = \left(\frac{3}{11}; \frac{9}{11}\right)$, $Y_B^* = \left(0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11}\right)$, $\gamma = \frac{49}{11}$ экендигине ээ болобуз. Чиймеден B_1 стратегиясы оптималдуу стратегияда катышпай тургандыгы көрүнүп турат. ◊

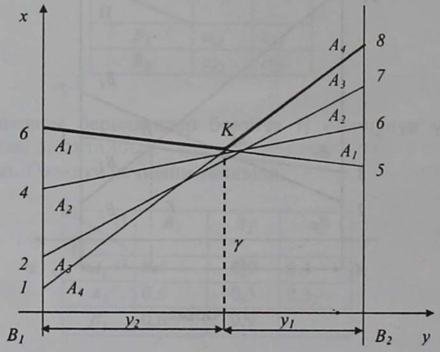


3 – чийме

4-мисал. Төмөнкү төлөм матрицасы менен берилген оюндун чечимин тапкыла.

I \ II	B_1	B_2
A_1	6	5
A_2	4	6
A_3	2	7
A_4	1	8

◊ $\lambda = 5 \neq \beta = 6$ болгондуктан, оптималдуу стратегияны аралаш стратегиялардан издейбиз. I оюнчунун стратегияларына тиешелүү түздөрдү түзүп алабыз (4 – чийме). Утуштун жогорку чеги A_1KA_4 сынык сызыгы, андагы K чекити оптимум чекити болот. Бул чекитте A_1A_1 жана A_4A_4 кесиндилери кесилишкендиктен, I оюнчунун A_1 жана A_4 стратегиялары активдүү. Активдүү эмес A_2, A_3 стратегияларын төлөм матрицасынан сызып таштап, 2×2 оюнун алабыз. Бул оюнду чыгарып, $X_A^* = \left(\frac{7}{8};0;0;\frac{1}{8}\right)$, $Y_B^* = \left(\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right)$, $\gamma = \frac{43}{8}$ кө ээ болобуз. ◊



4 - чийме

10.4.2. Матрицалык оюнду сызыктуу программалоо маселесине келтирүү

Буга чейин каралган оюндар чечүү процессин көрсөтмөлүү жана ыңгайлуу кылган, жөнөкөй геометриялык талкуугa мүмкүн экендиги менен айырмаланат. Оюндун ченеминин өсүшү менен оюнду чечүү жана анализдөө татаалданат. Мындай учурда оптималдаштыруунун сандык методдору колдонулат. Бирок, x_i, y_j, γ ларды байланыштыруучу көз карандылыктарды туюндуруучу негизги принциптер мурунку боюнча сакталат. $m \times n$ ченемдүү оюндун төлөм матрицасы берилсин (7 – таблица).

I оюнчу $A_1,...,A_m$ таза стратегияларына, ал эми II оюнчу $B_1,...,B_n$ таза стратегияларына ээ болсун. $X_A^* = (x_1^*, x_2^*,...,x_m^*)$ жана $Y_B^* = (y_1^*, y_2^*,...,y_n^*)$ оптималдуу стратегияларын аныктоо керек. Мында x_i^*, y_j^* - тиешелүү түрдө A_i, B_j стратегияларын колдонуунун ыктымалдуулуктары жана

$$x_1^* + x_2^* + ... + x_m^* = 1, \; y_1^* + y_2^* + ... + y_n^* = 1.$$

Оюн ээр сымал чекитке ээ эмес болсун. Демек, оюндун чечимин аралаш стратегиялардан издейбиз.

7- таблица

II / I	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Эгерде I оюнчу $X_A^* = (x_1^*, x_2^*,...,x_m^*)$ аралаш стратегиясын II оюнчунун каалагандай B_j таза стратегиясына каршы колдонсо, анда ал оюндун баасы γ_j га барабар $a_{1j}x_1^* + a_{2j}x_2^* + ... + a_{mj}x_m^* = \gamma_j$, $j = 1,2,...,n$ (j- мамычанын элементтери тиешелүү түрдө $A_1,...,A_m$ стратегияларын колдонуунун ыктымалдуулуктарына көбөйтүлөт) орточо утушту же утуштун математикалык күтүүсүн алат. Бардык γ_j орточо утуштарынын оюндун баасы γ дан кичине эмес экендигин эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{i1}x_i + \ldots + a_{m1}x_m \geq \gamma, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{i2}x_i + \ldots + a_{m2}x_m \geq \gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + \ldots + a_{mj}x_m \geq \gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{in}x_i + \ldots + a_{mn}x_m \geq \gamma. \end{cases} \qquad (10.22)$$

(10.22) – барабарсыздыктардын оң жана сол жактарын оюндун баасы $\gamma > 0$ га бөлүп жиберип,

$$a_{1j}\frac{x_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{x_2}{\gamma} + \ldots + a_{ij}\frac{x_i}{\gamma} + \ldots + a_{mj}\frac{x_m}{\gamma} \geq 1,\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (10.23)$$

барабарсыздыктарын алабыз.

Жаңы

$$\frac{x_i}{\gamma} = t_i,\ i = 1,2,\ldots,m \qquad (10.24)$$

белгилөөлөрүн кийирели.

Анда (10.22) – система

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{i1}t_i + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{i2}t_i + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}t_1 + a_{2j}t_2 + \ldots + a_{ij}t_i + \ldots + a_{mj}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{in}t_i + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \qquad (10.25)$$

көрүнүшүнө келет. Мында $x_i \geq 0, \gamma > 0$ болгондуктан, бардык $t_i \geq 0$ болот.

$x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^* = 1$ барабардыгынан жана (10.24)-дөн t_i өзгөрүлмөлөрүнүн

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_k + \ldots + t_m = \frac{1}{\gamma}$$

барабардыгын канааттандырышы келип чыгат.

I оюнчунун максаты – өзүнүн кепилденген утушун, б.а. γ ны максималдаштыруу. Ал $\frac{1}{\gamma}$ чоңдугун минималдаштырууга тең күчтүү. I оюнчунун оптималдуу стратегиясын аныктоо маселесин төмөнкүчө баяндоого болот: $t_i \geq 0,\ i = 1,2,...,m$ өзгөрүлмөлөрүнүн

$$\varphi(t) = t_1 + t_2 + ... + t_k + ... + t_m \rightarrow min \qquad (10.26)$$

функциясын минималдаштыруучу жана (10.25) – системаны канааттандыруучу терс эмес маанилерин тапкыла. Бул сызыктуу программалоо маселеси болуп саналат. (10.25)-(10.26) - сызыктуу программалоо маселесинин чечиминен жана

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} t_i}, \qquad (10.27)$$

$$X_i = \frac{t_i}{\sum_{i=1}^{m} t_i}, \quad i = 1,2,...,m \qquad (10.28)$$

формулаларынан оюндун баасы γ ны жана I оюнчунун $X_A^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ оптималдуу стратегиясын аныктайбыз.

II оюнчунун $Y_B^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ оптималдуу стратегиясы үчүн бардык орточо утуштар оюндун баасы γ дан чоң эмес, ошондуктан

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq \gamma, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \leq \gamma, \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq \gamma \end{cases} \qquad (10.29)$$

барабарсыздыктар системасына ээ болобуз. Барабарсыздыктардын бардык мүчөлөрүн γ га бөлүп жиберип,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1, \end{cases} \tag{10.30}$$

системасын алабыз. Мында $u_j = \dfrac{y_j}{\gamma}$, $j = 1,2,\ldots,n$ жана $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{1}{\gamma}$ шартын канааттандырат. II оюнчу өзүнүн кепилденген утушун минималдаштырууга аракетенет, б.а. $max\dfrac{1}{\gamma}$ экендигин эске алуу керек. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ өзгөрүлмөлөрү (10.30)-системадан

$$\psi(u) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{\gamma} \tag{10.31}$$

функциясы максимумга ээ боло тургандай тандалып алынат.

Оюнду II оюнчуга карата чечүү сызыктуу программалоо маселесине келтирилди. Мына ошентип, $(a_{ij})_{m\times n}$ төлөм матрицасы менен берилген оюндун $X_A^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ жана $Y_B^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ оптималдуу стратегияларын сызыктуу программалоонун өз ара түгөйлөш маселелерин чечүү менен табууга болот:

баштапкы маселе

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} t_i \ge 1,\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{10.32}$$

$$t_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{10.33}$$

чектөөлөрүндө

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} t_i \to min, \tag{10.34}$$

түгөйлөш маселе

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \le 1,\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{10.35}$$

$$u_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{10.36}$$

чектөөлөрүндө

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \to max. \tag{10.37}$$

Мында

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} t_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} u_j} \qquad (10.38)$$

$$x_i = \gamma \cdot t_i, \; i = 1,2,...,m, \qquad (10.39)$$

$$y_j = \gamma \cdot u_j, \; j = 1,2,...,n. \qquad (10.40)$$

Бул маселелердин каалаган бирин чечип, түгөйлөштүктүн теоремаларын пайдаланып, экинчисинин чечимин аныктоого болот.

Мисал. Фирма үч түрдүү A_1, A_2 жана A_3 продукцияларын өндүрөт жана талаптын B_1, B_2, B_3, B_4 абалдарынан көз каранды болгон пайданы алат. Төлөм матрицасындагы a_{ij} элементи фирманын i - продукцияны талап j - абалда болгондо өндүргөндөгү пайдасын берет.

Талаптын каалагандай абалында пайданын орточосуна кепилдик берүүчү продукцияларды өндүрүүнүн оптималдуу пропорцияларын тапкыла.

◊ Маселе төмөнкү төлөм матрицасы менен берилген оюнга келтирилет.

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	3	4	2
A_2	3	4	6	5
A_3	2	5	1	3

Оюнду чечүүдөн мурда пайдасыз стратегияларды аныктап алабыз. Төлөм матрицасында мындай стратегиялар жок. Андан кийин оюндун төмөнкү жана жогорку бааларын аныктайбыз. $\alpha \neq \beta$ болгондуктан, оюн ээр сымал чекитке ээ эмес. Демек, оптималдуу чечимди оюнчулардын $X_A^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ жана $Y_B^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ аралаш стратегияларынан издейбиз.

$t_i = \frac{x_i}{\gamma}$, $i = 1,2,3$ жана $u_j = \frac{y_j}{\gamma}$, $j = 1,2,3,4$ деп белгилеп, сызыктуу программалоонун өз ара түгөйлөш маселелерин жазып алабыз:

1 - маселе
(*баштапкы маселе*)

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \geq 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1, \end{cases}$$

$t_i \geq 0,\ i = 1,2,3$

чектөөлөрүндө

$\varphi(t) = t_1 + t_2 + t_3 \to min.$

2 – маселе
(*түгөйлөш маселе*)

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \leq 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \leq 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \leq 1, \end{cases}$$

$u_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4$

чектөөлөрүндө

$\psi(u) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to max.$

Маселелердин бирин, мисалы 2 – маселени симплекс метод менен чыгаралы. Акыркы кадамда төмөнкү таблица алынды:

Базис	Бош мүчө	$-u_5$	$-u_2$	$-u_3$	$-u_6$
u_1	3/14	5/14	1/2	4/7	-1/7
u_4	1/14	-3/14	1/2	6/7	2/7
u_7	5/14	-1/14	5/2	-19/7	-4/7
ψ	2/7	1/7	0	3/7	1/7

Мындан $U = \left(\frac{3}{14};0;0;\frac{1}{14}\right)$, $\psi_{max}(u) = \frac{2}{7}$ болот. (10.38)-ден $\gamma = \frac{7}{2}$ алынат. u_i жана y_jлардын арасындагы катыштарды эске алып, $Y_B^{*} = \left(\frac{3}{4},0,0,\frac{1}{4}\right)$ ге ээ болобуз. Таблицанын акыркы жолчосунан $t_1 = \frac{1}{7}, t_2 = \frac{1}{7}, t_3 = 0$ алынат. $X_A^{*} = \left(x_1^{*}, x_2^{*}, x_3^{*}\right)$ оптималдуу стратегиясын $x_i = \gamma \cdot t_i$, $i = 1,2,3$, барабардыгынан аныктайбыз, б.а.

$$x_1^{*} = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{2};\ x_2^{*} = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{2};\ x_3^{*} = \frac{7}{2}\cdot 0 = 0;\ X_A^{*} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

Демек, фирма A_1 продукциясынан 50% жана A_2 продукциясынан да 50% өндүрүүсү, ал эми A_3 продукциясынан өндүрбөөсү керек. Продукцияларды өндүрүүдөгү талаптардын оптималдуу стратегиялары талаптын төмөнкүдөй абалдарына туура келүүсү керек: оптималдуу талапта 75% те B_1 абалда жана 25% те B_4 абалда болуусу керек. ◊

Көнүгүүлөр

10.1. Тигүү цехи жаш балдардын көйнөгүн жана костюмдарын өндүрөт жана продукцияларын фирмалык дүкөндөр аркылуу сатат. Продукцияга болгон талап абаырайынан көз каранды. Жүргүзүлгөн байкоолор боюнча ишкана апрель-май айлары жылуу болсо, 600 костюм жана 1975 көйнөк, ал эми суук болсо, 1000 костюм жана 625 көйнөк сата алат. Көрсөтүлгөн мөөнөттөрдө костюмдун бирдигине 27 а.б., көйнөктүн бирдигине 8 а.б. чыгым жумшалат, ал эми сатылуу баалары тиешелүү түрдө 48 жана 16 а.б. Каалагандай абаырайында максималдуу киреше алына тургандай ишкананын өндүрүү планын аныктагыла.

Төмөнкү төлөм матрицаларындагы оюндун жогорку жана төмөнкү бааларын аныктагыла. Эгерде ээр сымал чекити жашаса, минимакстык стратегияларын жана оюндун оптималдуу чечимин тапкыла.

10.2.
$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

10.3.
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

10.4.
$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

10.5.
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

10.6.
$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

10.7.
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2×2 оюндарынын чечимин тапкыла жана геометриялык талкууланышын келтиргиле.

10.8.
$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

10.9.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.10.
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Төмөнкү оюндардын чечимин сызыктуу программалоо маселесине келтирүү менен тапкыла.

10. 11.
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.12.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10.13.
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Төмөнкү оюндарды жөнөкөйлөткүлө жана чечимин тапкыла.

10.14.
$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

10.15.
$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 8 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

XI глава. ОПТИМАЛДАШТЫРУУНУН КЛАССИКАЛЫК МЕТОДДОРУ

11.1. Экстремумдарды аныктоонун классикалык методдору

Операцияларды изилдөөнүн көптөгөн экономикалык моделдеринде турактуу жана өзгөрүлмөлүү факторлордун арасындагы көз карандылыктарды биринчи жакындаштырууда гана сызыктуу деп эсептөөгө болот. Деталдаштырып кароо алардын сызыктуу эмес экендигин аныктоого мүмкүндүк берет. Чындыгында пайда, өздүк нарк, капиталдык чыгымдар ж.б. көрсөткүчтөр өндүрүштүн көлөмүнөн, ресурстарды сарптоодон ж.б. лардан сызыктуу эмес көз каранды.

Оптималдаштыруунун классикалык методдору менен чечилүүчү сызыктуу эмес маселелердин классын бөлүп көрсөтүүгө болот. Чектөөлөрдүн арасында барабарсыздыктар жок, терс эмес болуу шартынын болушу шарт эмес, өзгөрүлмөлөр дискреттүү эмес, теңдемелердин саны белгисиздердин санынан кичине, б.а. $m<n$, ал эми 1.4-пункттагы $\varphi_i(X), i=1,2,...,m$ жана $f(X)$ функциялары үзгүлтүксүз жана жок дегенде экинчи тартипке чейинки жекече туундуларга ээ болсун. Бул учурда оптималдаштыруу маселесин төмөнкүчө баяндоого болот:

$$\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, \ i=1,2,...,m \tag{11.1}$$

чектөөлөр системасын канааттандыраган жана

$$z=f(x_1,x_2,...,x_n) \tag{11.2}$$

максаттуу функциясы максималдык(минималдык) мааниге ээ боло тургандай $x_1,x_2,...,x_n$ өзгөрүлмөлөрүн табуу каралсын.

Мындай маселелерди дифференциалдык эсептөөлөрдүн классикалык методдору менен чечүүгө болот. Бирок мындай эсептөөлөрдөгү кездешүүчү эсептөөнүн кыйынчылыктары башка методдорду пайдалануунун зарылдыгын көрсөтөт. Ошондуктан, классикалык методдор көбүнчө эсептөө каражаты катары эмес, теориялык анализдин негизи катары пайдаланылат.

Сызыктуу эмес маселеге жөнөкөй мисал болуп төмөнкү маселе эсептелет.

1-мисал. Фирма эки жол менен: дүкөн аркылуу жана соода агенттери аркылуу автомобилдерди сатат. x_1 сандагы автомобилди дүкөн аркылуу сатууда $2x_1 + x_1^2$ а.б., ал эми x_2 сандагы автомобилди соода агенттери аркылуу сатууда x_2^2 а.б. сарпталат. Сатыла турган автомобилдердин жалпы саны 65 болсо, жалпы чыгым минималдуу боло тургандай автомобилдерди сатуунун оптималдуу жолун тапкыла.

◊ Маселенин математикалык моделин түзөлү.

Суммардык чыгымдар

$$f = 2x_1 + x_1^2 + x_2^2$$

ге барабар.

Биринчи жана экинчи ыкма менен сатылган автомобилдердин саны $x_1 + x_2$ жалпы автомобилдердин саны 65 ке барабар. Жыйынтыгында маселенин математикалык модели төмөнкүчө болот:

$$f = 2x_1 + x_1^2 + x_2^2 \qquad (11.3)$$

функциясынын

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 65, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (11.4)$$

чектөөлөрүндөгү минималдык маанисин тапкыла. ◊

Оптималдаштыруунун классикалык методдорун колдонууда функциянын локалдык, глобалдык жана шарттуу экстремумдарынын айрымасын так билүү керек. Мында бир өзгөрүлмөлүү функция үчүн локалдык жана глобалдык экстремумдардын аныктоолорун кайталоо пайдалуу болот. Шарттуу экстремум түшүнүгү өзгөрүлмөлөрдүн саны 2 ден кем эмес ($n \geq 2$) учурда берилет.

$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ функциясы $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, ($X^* \in D(f)$, б.а. функциянын аныкталуу аймагынын чекити) чекитинде жана анын кандайдыр чеке белинде эки жолу дифференцирленүүчү болсун. Бул чеке белдин бардык X

чекиттери үчүн $f(X^*) \geq f(X)$ же $f(X^*) \leq f(X)$ болсо, анда $f(X)$ функциясы X^* чекитинде экстремумга (тиешелүү түрдө максимумга же минимумга) ээ деп айтабыз.

$z = f(X)$ функциясынын бардык жекече туундуларын нөлгө айландыруучу X^* чекити *стационардуу чекит* деп аталат.

Экстремумдун зарыл шарты. Эгерде X^* чекитинде $z = f(X)$ функциясы экстремум ээ болсо, анда бул чекиттеги жекече туундулары нөлгө барабар:

$$f'_{x_i}(X^*) = 0,\ i = 1,2,...,n.$$

Демек, $z = f(X)$ функциясынын экстремум чекиттери

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1,x_2,...,x_n) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1,x_2,...,x_n) = 0, \\ .... \\ f'_{x_n}(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \end{cases} \qquad (11.5)$$

теңдемелер системасын канааттандырышат.

Бир өзгөрүлмөлүү учурдагыдай эле, стационардуу чекит экстремум чекит болуусу үчүн зарыл шарт жетиштүү болуп эсептелбейт. Жетиштүү шарттарды алуу үчүн экинчи тартиптеги дифференциалдын стационардуу чекиттеги белгисин аныктоо керек. Экинчи тартиптеги дифференциал $d^2 f(x_1,x_2,...,x_n)$ түрүндө белгиленет жана экинчи тартиптеги жекече туундулардын тиешелүү аргументтердин өсүндүлөрүнө көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар. Эгерде $f'_{x_i}(X)$ жекече туундусунун x_j өзгөрүлмөсү боюнча жекече туундусун тапсак, анда x_i, x_j өзгөрүлмөлөрү боюнча алынган жана $f''_{x_i x_j}(X)$ символу менен белгиленген экинчи тартиптеги жекече туундуну алабыз. Анда

$$d^2 f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X) \Delta x_i \Delta x_j .$$

Экстремумдун жетиштүү шарты:

а) X^0 стационардуу чекитинде $z = f(X)$ функциясы максимумга ээ болот, эгерде бир учурда нөлгө барабар эмес $\Delta x_i, i=1,2,...,n$ жана $\Delta x_j, j=1,2,...,n$ дерде $d^2 f(X^0)<0$ болсо жана минимумга ээ болот, эгерде $d^2 f(X^0)>0$ болсо;

б) эгерде $d^2 f(X^0)$ дифференциалы $\Delta x_i, i=1,2,...,n$ жана $\Delta x_j, j=1,2,...,n$ дерге карата оң жана терс маанилерди алса, анда X^0 чекитинде экстремум жок;

в) эгерде $d^2 f(X^0)$ - $\Delta x_i, i=1,2,...,n$ жана $\Delta x_j, j=1,2,...,n$ өсүндүлөрдүн нөлдүк эле эмес, башка маанилеринде да нөлгө айланса, анда экстремум жөнүндөгү суроо ачык бойдон калат.

$z=f(x_1,x_2)$ эки өзгөрүлмөлүү функция үчүн жетиштүү шарттар татаал эмес. Экинчи тартиптеги жекече туундулар төртөө: $f''_{x_1^2}(X)$, $f''_{x_1x_2}(X)$, $f''_{x_2x_1}(X), f''_{x_2^2}(X)$. Алардын ичинен аралаш $f''_{x_1x_2}(X)$ жана $f''_{x_2x_1}(X)$ туундулары функция үзгүлтүксүз болсо, барабар болушат.

$X^0(x_1^0,x_2^0)$ стационардык чекитиндеги жекече туундулардын маанилерин эсептейли:

$$a_{11}=f''_{x_1^2}(X^0),\ a_{12}=f''_{x_1x_2}(X^0),\ a_{21}=f''_{x_2x_1}(X^0),\ a_{22}=f''_{x_2^2}(X^0).$$

Δ аркылуу $a_{ij}, i,j=1,2$ лардан түзүлгөн аныктагычты белгилейбиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Анда эки өзгөрүлмөлүү функциянын экстремумунун жетиштүү шартын төмөнкүчө да берүүгө болот:

а) эгерде $\Delta>0$ жана $a_{11}<0\,(a_{22}<0)$ болсо, анда функция X^0 чекитинде максимумга ээ, ал эми $\Delta>0$ жана $a_{11}>0$ $(a_{22}>0)$ болсо, анда функция X^0 чекитинде минимумга ээ;

б) эгерде $\Delta<0$ болсо, экстремуму жок;

в) эгерде $\Delta=0$ болсо, анда экстремум жөнүндөгү суроо ачык бойдон калат.

n өзгөрүлмөлүү функциянын экстремумун аныктоонун схемасы бир өзгөрүлмөлүү функциянын локалдык экстремумунун аныктоонун эрежелерине окшош болот.

2-мисал. $z = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ функциясын экстремумга изилдегиле.

◊ Жекече туундуларын табалы:

$$\begin{cases} z'_{x_1} = 3x_1^2 - 3x_2, \\ z'_{x_2} = 3x_2^2 - 3x_1. \end{cases} \tag{11.6}$$

Жекече туундуларын нөлгө барабарлайбыз:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2 = 0, \\ 3x_2^2 - 3x_1 = 0. \end{cases} \tag{11.7}$$

(11.7)-системаны чыгарып, $X^1 = (0,0);\ X^2 = (1,1)$ стационардык чекиттерин алабыз.

(11.6)-дан экинчи тартиптеги жекече туундуларды табалы:

$$\begin{cases} z''_{x_1^2} = \left(3x_1^2 - 3x_2\right)'_{x_1} = 6x_1, \\ z''_{x_1x_2} = \left(3x_1^2 - 3x_2\right)'_{x_2} = -3, \\ z''_{x_2x_1} = \left(3x_2^2 - 3x_1\right)'_{x_1} = -3, \\ z''_{x_2^2} = \left(3x_2^2 - 3x_1\right)'_{x_2} = 6x_2. \end{cases}$$

Стационардык чекиттердеги экинчи тартиптеги жекече туундулардын маанилерин эсептеп, Δ аныктагычын түзөбүз жана экстремумдун жетиштүү шартын пайдаланабыз.

$X^1(0;0)$ чекитинде $a_{11} = 0$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{22} = 0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Демек, бул чекитте экстремум жок.

$X^2 = (1,1)$ чекитинде $a_{11} = 6$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{22} = 6$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27.$$

$\Delta > 0$, $a_{11} > 0$ болгондуктан, функция бул чекитте минимумга ээ. $z_{min} = -1$. ◊

Жогоруда n өзгөрүлмөлүү функциянын локалдык экстремуму жөнүндө сөз болду. Эреже катары, практикалык маселелерде функциянын кандайдыр бир аймактагы эң чоң же эң кичине маанилерин (глобалдык максимум) аныктоо талап кылынат.

$z = f(X)$ функциясы берилген D аймагынын X^0 чекитинде *глобалдык максимумга (эң чоң мааниге) же глобалдык минимумга (эң кичине мааниге)* ээ деп айтабыз, эгерде каалагандай $X \in D$ чекити үчүн тиешелүү түрдө $f(X) \leq f(X^0)$ же $f(X) \geq f(X^0)$ барабарсыздыгы орун алса.

Вейерштрасстын теоремасы. Эгерде D аймагы туюк жана чектелген болсо, анда дифференцирленүүчү $z = f(X)$ функциясы өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине стационардык чекиттерде же аймактын чек аралык чекиттеринде ээ болот.

Демек, $z = f(X)$ функциясынын D аймагындагы эң чоң жана эң кичине маанилерин табуу үчүн:

1. D аймагындагы бардык стационардык чекиттерди табуу жана алардагы функциянын маанилерин эсептөө;
2. D аймагынын чек арасында функцияны экстремумга изилдөө;
3. 1- жана 2-п. алынган функциянын маанилерин салыштыруу керек. Бул сандардын эң чоңу (эң кичинеси) функциянын берилген аймактагы эң чоң (эң кичине) мааниси болот.

D аймагынын чек арасы аналитикалык түрдө $x_1, x_2, ..., x_n$ өзгөрүлмөлөрүнө карата теңдемелердин (шарттардын) системасы менен берилүүсү мүмкүн. Ошондуктан, чек арадагы функциянын экстремалдык касиеттерин изилдөө маселеси шарттуу экстремум маселесин чечүүгө келтирилет.

Шарттуу экстремум.

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; i = 1, 2, ..., m, \; m < n \qquad (11.8)$$

теңдемелер системасынын $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы экстремумга ээ боло тургандай $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ чечимин табуу талап кылынсын.

f жана $\varphi_i, i=1,2,...,m$ функциялары бардык өзгөрүлмөлөрү боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ деп божомолдонот. (11.8)-теңдемелери *байланыш теңдемелери* деп аталышат.

(11.8)-системаны канааттандыруучу $X^0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде $z=f(X)$ функциясы *шарттуу максимумга (минимумга)* ээ деп аташат, эгерде $f(X^0) \geq f(X)$ $(f(X^0) \leq f(X))$ барабарсыздыгы (11.8)-системаны канааттандыруучу бардык X чекиттеринде орун алса.

Шартуу экстремумду аныктоо маселеси (11.1)-(11.2)-сызыктуу эмес программалоо маселеси менен дал келээрин жеңил эле байкоого болот.

Шартуу экстремумду аныктоонун бир ыкмасы (11.8)-байланыш теңдемелеринен m өзгөрүлмөнү, айталы $x_1, x_2, ..., x_m$ өзгөрүлмөлөрүн калган $n-m$ өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтууга

$$x_i = \psi_i(x_{m+1}, ..., x_n),\ i=1,2,...,m \tag{11.9}$$

мүмкүн болгон учурда колдонулат.

x_i үчүн алынган туюнтмаларды z функциясына коюп,

$$z = f(\psi_1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., \psi_m(x_{m+1}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n)$$

же

$$z = F(x_{m+1}, ..., x_n) \tag{11.10}$$

ге ээ болобуз.

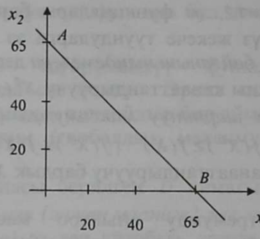
Маселе $n-m$ өзгөрүлмөлүү (11.10)-функциянын локалдык (глобалдык) экстремумун табууга келтирилди. Эгерде (11.10)-функция $X^0 = (\tilde{x}_{m+1}^0, ..., \tilde{x}_n^0)$ чекитинде экстремумга ээ болсо, анда $X^0 = (\psi_1(\tilde{x}_{m+1}^0, ..., \tilde{x}_n^0), ..., \psi_m(\tilde{x}_{m+1}^0, ..., \tilde{x}_n^0), \tilde{x}_{m+1}^0, ..., \tilde{x}_n^0)$ чекитинде $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы шарттуу экстремумга ээ болот.

Бул ыкма *өзгөрүлмөлөрдү жоюу* методу деп аталат.

3-мисал. 1-мисалдын чечимин тапкыла.

◊ (11.4)-чектөөлөр x_1Ox_2 тегиздигинде AB кесиндисин – туюк чектелген аймакты аныктайт (1-чийме).

Вейерштрасстын теоремасына ылайык, функция минимумга кесиндинин ички чекиттеринде же бул кесиндинин $A(0;65)$ жана $B(65;0)$ чек аралык чекиттеринин биринде ээ болот.



1-чийме

(11.3)-байланыш теңдемесинен x_1 ди таап, (11.4)-гө коёбуз:

$$x_1 = 65 - x_2\ ,\ f = 2(65 - x_2) + (65 - x_2)^2 + x_2^2.$$

Бул туюнтманы жөнөкөйлөтүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f = 4355 - 132x_2 + 2x_2^2. \qquad (11.11)$$

Мында $x_2 \in [0;65]$. (11.11)-функциянын $[0;65]$ кесиндисинде глобалдык экстремумун табабыз. Бул функциянын туундусу

$$f' = -132 + 4x_2.$$

$x_2 = 33$ стационардык чекит. (11.11)-функциянын $x_2 = 33$ стационардык чекиттеги жана кесиндинин учтарындагы маанилерин эсептейбиз: $f(0) = 4355; f(33) = 2177; f(65) = 4225$.

Демек, $f_{min} = 2177$ минималдык маанисине $x_2 = 33$, $x_1 = 65 - x_2 = 32$ де, б.а. $(32,33)$ чекитинде ээ болот.

Фирма дүкөн аркылуу 32 даана, соода агенттери аркылуу 33 даана автомобил сатса, эң аз 2177 а.б. га барабар чыгым сарптайт. ◊

11.2. Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу

$z = f(X)$ функциясынын (11.8)-чектөөлөрдөгү шарттуу экстремумун аныктоо талап кылынсын.

Лагранждын функциясы деп аталуучу

$$L(X) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(X) \qquad (11.12)$$

функциясын түзүп алабыз. $\lambda_i, i=1,2,...,m$ — турактуу көбөйтүүчүлөр (Лагранждын көбөйтүүчүлөрү). Лагранждын көбөйтүүчүлөрүнө экономикалык маани берүүгө болоорун белгилей кетебиз. Эгерде $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ — $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ планына тиешелүү киреше, ал эми $\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n), i=1,2,...,m$ - функциясы бул планга тиешелүү i- ресурска сарпталган чыгым болсо, анда λ_i — i-ресурстун өлчөмүнүн өзгөрүшүнө карата максаттуу функциянын экстремалдуу маанисинин өзгөрүшүн мүнөздөөчү i- ресурстун баасы (маргиналдуу баа) болот. $L(X)$ - $n+m$ сандагы $(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ өзгөрүлмөлүү функция. Бул функциянын стационардык чекиттерин аныктоо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X)}{\partial x_j}=0, j=1,2,...,n, \\ \dfrac{\partial L(X)}{\partial \lambda_i}=0,\ i=1,2,...,m \end{cases} \tag{11.13}$$

теңдемелер системасын чечүүгө алынып келинет.

$L'_{\lambda_i}(X)=\varphi_i(X), i=1,2,...,m$ экендигин, б.а. (11.13)-системада байланыш теңдемелери да катышаарын жеңил эле байкоого болот. Мына ошентип, $z=f(X)$ функциясынын шарттуу экстремумун издөө маселеси $L(X)$ функциясынын локалдык экстремумун издөөгө алынып келинет. Эгерде стационардык чекит табылган болсо, анда экстремумдун жашоосу жөнүндөгү суроо жөнөкөй учурларда экстремумдун жетиштүү шарттарынын, б.а. $d^2L(X)$ диффереациалынын белгисин изилдөөнүн негизинде чечилет. Мында $\Delta x_j, j=1,2,...,n$ өсүндүлөрү байланыш теңдемелерин дифференцирлөөдөн алынган

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\Delta x_j=0,\ i=1,2,...,m \tag{11.14}$$

катыштары аркылуу байланышкан. Мисал карайбыз.

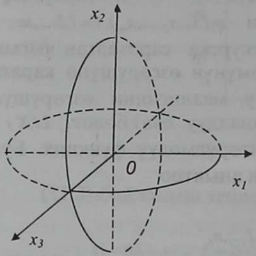
1-мисал. x_1,x_2,x_3 өзгөрүлмөлөрү

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

теңдемесин канааттандырган учурда

$$z = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - (3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)^2$$

функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.



2-чийме

◊ Байланыш теңдемеси мейкиндикте борбору координата башталышы, радиусу 1 ге барабар болгон сфераны аныктайт (2-чийме). Сфера туюк чектелген көптүк болгондуктан, Вейерштрасстын теоремасына ылайык, берилген көптүктө функция эң чоң жана эң кичине маанилерге ээ болот.

Шарттуу глобалдык экстремумду табуу керек. Байланыш теңдемесин $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ көрүнүшүндө жазып алабыз.

Лагранждын функциясын жазалы:

$$L(X) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - (3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1).$$

Бул функциянын x_1, x_2, x_3, λ өзгөрүлмөлөр боюнча жекече туундуларын табабыз:

$$L'_{x_1} = 18x_1 - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)6x_1 + 2\lambda x_1,$$
$$L'_{x_2} = 8x_2 - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)4x_2 + 2\lambda x_2,$$
$$L'_{x_3} = 2x_3 - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)2x_3 + 2\lambda x_3,$$
$$L'_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

Жекече туундуларды нөлгө барабарлап, төмөнкү системага ээ болобуз:

$$\begin{cases} x_1((9+\lambda) - 6(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)) = 0, \\ x_2((4+\lambda) - 4(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)) = 0, \\ x_3((1+\lambda) - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)) = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

Системаны чыгарып, стационардык чекиттерди табабыз жана алардагы фунциянын маанилерин эсептейбиз:

$$1. x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = \pm 1 \Rightarrow z = 0,$$
$$2. x_1 = 0;\ x_2 = \pm 1;\ x_3 = 0 \Rightarrow z = 0,$$
$$3. x_1 = \pm 1;\ x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow z = 0,$$
$$4. x_1 = 0;\ x_2 = x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{4},$$
$$5. x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2 = 0;\ x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = 1,$$
$$6. x_1 = x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_3 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}.$$

Бардык алынган маанилердин ичинен эң чоңун жана эң кичинесин тандап алабыз: $z_{\text{эң чоң}} = 1$, $z_{\text{эң кичине}} = 0$. ◊

Эгерде белгисиздердин саны $n = 2$ болсо, анда сызыктуу эмес маселелерди графиктик ыкма менен да чыгарууга болот. Ал үчүн чектөөлөр

$$\varphi_i(x_1, x_2) \le b_i, i = 1,2,\dots,m \tag{11.15}$$

барабарсыздыктар түрүндө, ал эми максаттуу функция

$$z = f(x_1, x_2) \tag{11.16}$$

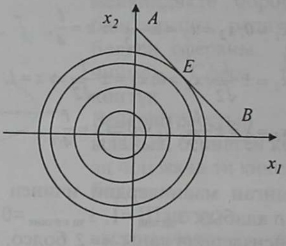
көрүнүшүндө болуусу керек.

СП маселесин геометриялык чечүү сыяктуу эле, алгач мүмкүн болгон чечимдердин көптүгүн (МБЧК) түзүп алуу керек. Бирок СП маселесинен айрымаланып, мында МБЧК томпок болуусу шарт эмес. Функция экстремумга аймактын ички чекиттеринде да, чек арасында да ээ болуп калышы мүмкүн.

МБЧКны түзгөндөн кийин максаттуу функциянын деңгээл сызыгынын, б.а. (11.16) – максаттуу функция турактуу, б.а. $f(x_1, x_2) = C$ болгон тегиздиктин чекиттеринин көптүгүнүн теңдемесин жазуу керек. Анан C нын түрдүү маанилери үчүн деңгээл сызыктарды тургузуп, максаттуу функциянын өсүү (кемүү) багыты аныкталат. Деңгээл сызыкты керектүү багытка карай МБЧКда жылдырып, максаттуу функция оптималдык мааниге ээ болуучу көптүктүн чекити аныкталат.

2-мисал. 11.1-деги 1- мисалдын чечимин тапкыла.

◊ Маселенин МБЧКсы AB кесиндиси, ал эми $f = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 = (x_1+1)^2 + x_2^2 - 1$ максаттуу функциясынын деңгээл сызыктары борбору $x_1 = -1, x_2 = 0$ чекитинде болгон жана $R = \sqrt{C}$ радиустуу концентрикалык айланалар болушат.



3-чийме

3-чиймеден функция минималдык мааниге $x_2 = 65 - x_1$ түз сызыгынын жана $(x_1+1)^2 + x_2^2 = C$ айланасына жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенттери барабар болгон E чекитинде ээ болоору көрүнүп турат.

Акыркы теңдемени x_1 боюнча дифференцирлеп, төмөнкүгө ээ болобуз

$$2(x_1+1) + 2x_2x_2' = 0,$$
$$x_2' = -\frac{x_1+1}{x_2}.$$

Бул туюнтманы түз сызыктын бурчтук коэффициентине барабарлайбыз жана ага E чекити таандык болгон түздүн теңдемесин кошуп жазабыз:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+1}{x_2} = 1, \\ x_1 + x_2 = 65. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып, $x_1 = 32, x_2 = 33, f(x_1, x_2) = 2177$ оптималдык маанилерине ээ болобуз. ◊

Көнүгүүлөр

11.1-11.3-маселелердеги функциялардын локалдык экстремумдарын тапкыла.

11.1. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

11.2. $z = x^3 y^2 (12 - x - y), x > 0, y > 0$.

11.3. $z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 1$.

11.4-11.8-маселелердеги функциялардын глобалдык экстремумдарын графиктик ыкма менен тапкыла.

11.4. $z = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 40, \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11.5. $z = x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11.6. $z = x_1^2 + 2x_2 - 3$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11.7. $z = e^{-x_1^2 - x_2^2}(2x_1^2 + 3x_2^2)$

$x_1^2 + x_2^2 \le 4$.

11.8. $z = x_1 x_2$

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$$

11.9-11.11-маселелердеги функциялардын экстремумдарын өзгөрүлмөлөрдү жоюу ыкмасы менен тапкыла.

11.9. $z = x_1^2 + x_2^2$, $x_1 + x_2 = 1$.

11.10. $z = x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2 \le 16$, $x_1 - x_2 = 4$.

11.11. $z = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

11.12-11.5-маселелерде локалдык экстремумдарды Лагранждын методу менен тапкыла.

11.12. $z = x_1 x_2$, $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

11.13. $z = x_1 + x_2$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1$.

11.14. $z = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$, $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 1$.

11.15. $z = x_1^3 + x_2^3$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

XII глава. ТОМПОК ПРОГРАММАЛООНУН МОДЕЛДЕРИ

Сызыктуу эмес программалоонун (11.1) - жана (11.2)-маселелерин f жана $\varphi_i, i=1,2,...,m$ функциялары томпок болгон учурда карайлы. Керектүү түшүнүктөрдү келтиребиз.

12.1. Багыт боюнча алынган туунду жана градиент. Томпок функциялар

$F(X)=F(x_1,x_2,...,x_n)$ функциясынын l багыты боюнча X чекитиндеги туундусу деп,

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{F(X+\lambda l)-F(X)}{\lambda}$$

пределин айтабыз.

Адатта l багыты $l=(l_1,l_2,...,l_n)$ вектору менен берилет.

Эгерде F функциясы X чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын бул чекитте жекече туундулар аркылуу

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{1}{|l|}\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (12.1)$$

түрүндө туюнтулуучу каалагандай l багыты боюнча туундусу жашайт. Мында $|l|$ — l векторунун узундугу, б.а. $|l|=\sqrt{l_1^2+...+l_n^2}$.

Багыт боюнча туундунун абсолюттук чоңдугу бул багыт боюнча функциянын өзгөрүү ылдамдыгын, ал эми белгиси функциянын өзгөрүүсүнүн мүнөзүн (өсүүсүн же кемүүсүн) көрсөтөт.

$F(X)=F(x_1,x_2,...,x_n)$ функциясынын *градиенти* деп, координаттык октордогу проекциялары тиешелүү жекече туундулар болгон векторду, б.а.

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

векторун айтабыз. Градиентти ∇F түрүндө белгилейбиз.

$max\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)$ мааниси l багыты ∇F багыты менен дал келгенде алынаарын көрсөтүүгө болот. (12.1)-формуладан F функциясынын ∇F багыты боюнча туундусу

$$\frac{\partial F}{\partial(\nabla F)} = \frac{1}{|\nabla F|} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} = |\nabla F|$$

чоңдугуна барабар экендиги алынат.

Мына ошентип, ар бир X чекитиндеги градиенттин багыты бул чекитте функциянын эң чоң өсүүсүнүн багыты, ал эми градиенттин узундугу функциянын өсүүсүнүн эң чоң ылдамдыгы болуп саналат.

1-мисал. $F = x_1x_2x_3 + 2x_3$ функциясынын $A(0;1;2)$ чекитинде өсүүсүнүн эң чоң ылдамдыгын жана бул функциянын A чекитинде $l = (1;-2;2)$ багыты боюнча өзгөрүүсүнүн мүнөзүн аныктагыла.

◊ $\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2x_3,\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1x_3, \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_1x_2 + 2$ болгондуктан, $\nabla F = (x_2x_3\ , x_1x_3, x_1x_2 + 2)$ жана $\nabla F\big|_A = (2;0;2)$. Ошентип, функциянын A чекитинде өсүүсүнүн эң чоң ылдамдыгы $|\nabla F|_A = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$ ге барабар. $|l| = \sqrt{1+4+4} = 3$ жана $\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_A = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 2) = \frac{6}{3} = 2 > 0$. Демек, $\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_A > 0$ болгондуктан, F функциясы A чекитинде l багыты боюнча өсөт. ◊

$M \subset R^n$ көптүгү *томпок* деп аталат, эгерде каалагандай эки чекити менен бирдикте аларды бириктирүүчү кесиндини да камтыса.

Эгерде $[a,b]$ - сан огундагы кесинди жана $x \in [a,b]$ андагы каалагандай чекит болсо, анда

$$x = \alpha a + (1-\alpha)b,\ \ 0 \le \alpha \le 1 \ \text{ же}$$
$$x = \alpha_1 a + \alpha_2 b,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0. \qquad (12.2)$$

Мунун тескерисин да байкоо кыйын эмес: эгерде (12.2)-барабардык орун алса, анда $x \in [a,b]$. Мына ошентип, $[a,b]$

кесиндисин (12.2)-барабардыкты канааттандыруучу бардык x чекиттеринин көптүгү катары кароого болот. Анда томпок көптүк – каалагандай a,b чекиттеринин түгөйү менен бирдикте (12.2)-барабардыкты канааттандыруучу бардык x чекиттерин камтыган көптүк. Кесиндинин жана томпок көптүктүн бул аныктоолору a,b,x тер n- ченемдүү мейкиндиктин чекиттери болгон учурда да сакталат.

(12.2)-барабардыктан, индукция боюнча эгерде M- томпок мейкиндик болсо, анда каалагандай $X_1,...,X_r \in M$ чекиттери жана $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$ барабардыгын канааттандырган каалагандай чыныгы $t_i \geq 0, i = 1,2,...,r$ сандары үчүн $\sum_{i=1}^{r} t_i X_i \in M$ орун алаарын көрсөтүүгө болот.

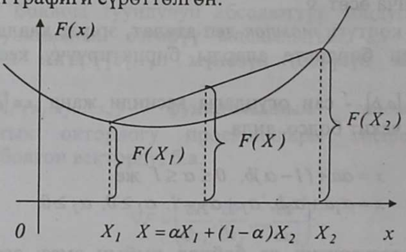
n- ченемдүү мейкиндиктин томпок M көптүгүндө аныкталган $F(X) = F(x_1, x_2,...,x_n)$ функциясы бул көптүктө *томпок* деп аталат, эгерде каалагандай $X_1, X_2 \in M$ чекиттери жана $\alpha \in [0,1]$ саны үчүн

$$F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \leq \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2) \qquad (12.3)$$

барабарсыздыгы аткарылса.

Эгерде (12.3)-дөгү барабарсыздыктын $\leq$ белгисин $\geq$ белгисине өзгөртсөк, иймек функциянын аныктоосун алабыз. Эгерде (12.3)-дөгү барабарсыздык так аткарылса, анда функция *так томпок* деп аталат.

1-чиймеде бүткүл сан огунда томпок бир өзгөрүлмөлүү функциянын графиги сүрөттөлгөн.

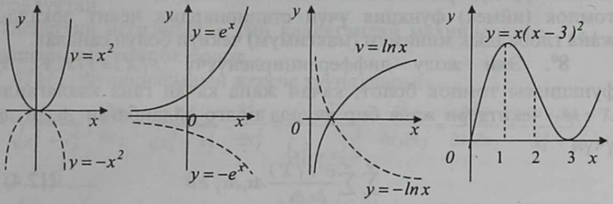


1-чийме

Геометриялык жактан $F(x)$ функциясынын томпоктугу бул функциянын графигинин каалагандай хордасынын каалагандай чекити графиктин тиешелүү чекитинен төмөн жайгашпайт дегенди түшүндүрөт. Демек, бир өзгөрүлмөлүү функциянын томпок же иймектигин графигинен эле байкоого болот.

2-мисал. 2-чиймедеги томпок жана иймек функцияларды аныктагыла.

◊ $y = x^2, y = e^x$ функциялары чыныгы сандардын көптүгүндө так томпок, ал эми $y = \ln x$ функциясы оң чыныгы сандардын көптүгүндө иймек. $y = x(x-3)^2$ функциясы $(-\infty;2]$ кесиндисинде иймек, $[2;+\infty)$ кесиндисинде томпок. ◊



2-чийме

Томпок функциялардын касиеттерин карайлы. Бардык каралуучу функциялар кандайдыр бир томпок M көптүгүндө аныкталган деп божомолдонот. Касиеттер далилдөөсүз келтирилет, бирок алардын көпчүлүгүн (12.3)-барабарсыздык боюнча жеңил текшерип коюуга болот. Ал эми бир өзгөрүлмөлүү функциялар үчүн графиктерин пайдаланууга болот.

Томпок функциялардын алгебралык жана аналитикалык касиеттери:

1^0. Эгерде $F(X)$ функциясы томпок болсо, анда $-F(X)$ функциясы иймек болот.

2^0. $F(X) = c$ жана $F(X) = ax + b$ функциялары бүткүл чыныгы сандардын көптүгүндө томпок да, иймек да болот.

3^0. Эгерде $F_i(X),\ i = 1,2,...,m$ функциялары томпок болушса, анда каалагандай $\alpha_i \geq 0,\ i = 1,2,...,m$ чыныгы сандары үчүн $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i$ функциясы да томпок болот.

4⁰. Эгерде $F(X)$ томпок функция болсо, анда каалагандай α саны үчүн $F(X)<\alpha$ барабарсыздыгынын чечимдеринин көптүгү томпок көптүк же куру көптүк болот.

5⁰. Өзгөрүлмөлөрдүн бардык терс эмес маанилеринде $\varphi_i(X), i=1,2,...,m$ функциялары томпок болушса, анда $\varphi_i(X)\le b_i, i=1,2,...,m$ барабарсыздыктар системасынын чечимдеринин көптүгү томпок көптүк болот.

6⁰. M томпок көптүгүндө аныкталган томпок (иймек) функция бул көптүктүн ар бир ички чекитинде үзгүлтүксүз болот.

7⁰. Каалагандай дифференцирленүүчү так томпок (иймек) функция бирден көп эмес стационардык чекитке (б.а. бардык жекече туундулары нөлгө айланган чекиттерге) ээ болот. Мында томпок (иймек) функция үчүн стационардык чекит локалдык жана глобалдык минимум (максимум) чекити болуп саналат.

8⁰. Эки жолу дифференцирленүүчү $F(X)=F(x_1,x_2,...,x_n)$ функциясы томпок болот, качан жана качан гана каалагандай $X\in M$ чекиттери жана бир учурда нөлгө айланбаган $\Delta x_i, \Delta x_j$ лар үчүн

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j\ge 0 \qquad (12.4)$$

барабарсыздыгы аткарылса.

Бул шартты конкреттүү функциянын томпоктугун аныктоо үчүн колдонууда Сильвестрдин критерийин пайдалануу ыңгайлуу.

Сильвестрдин критерийи: (12.4)-шарт качан жана качан гана экинчи тартиптеги жекече туундулардын матрицасынын бардык башкы $\Delta_k, k=1,2,...,n$ минорлору, б.а.

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk}\end{vmatrix},\ a_{ij}=\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i\partial x_j}, k=1,2,...,n \qquad (12.5)$$

аныктагычтары терс эмес болгондо аткарылат.

Эгерде бардык $\Delta_k>0$ болсо, анда (12.4)-барабарсыздык так аткарылат жана F функциясы так томпок болот.

3-мисал. Төмөнкү функциялар томпок болушабы?

а) $f(x)=5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-16x_1-12x_2$; *б)* $g(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

а) $f(x)$ функциясынын жекече туундуларын табалы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=10x_1+4x_2-16,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=4x_1+2x_2-12\ ,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=10,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2.$$

Экинчи тартитеги жекече туундулардын матрицасын жазалы:

$$A=\begin{bmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Анын башкы минорлору $\Delta_1=|10|=10>0,\quad \Delta_2=|A|=4>0$ болгондуктан,
8 - касиеттин негизинде x тин каалагандай маанилеринде $f(x)$ функциясы так томпок болот.

б) $g(x)$ функциясынын жекече туундулары:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \frac{\partial g}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\ ,\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}=\frac{x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_1}=-\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}=\frac{x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Экинчи тартитеги жекече туундуларынын матрицасы:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\\ -\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{bmatrix}$$

Анын башкы минорлору

$$\Delta_1=\frac{x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}>0\ ,\Delta_2=|A|=\frac{x_1^2x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^3}-\frac{x_1^2x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}=\frac{x_1^2x_2^2(1-x_1^2-x_2^2)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^3}.$$

Демек, $g(x)$ функциясы $x_1^2+x_2^2<1, x_1\neq 0, x_2\neq 0$ учурда так томпок, $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1\neq 0, x_2\neq 0$ болгондо томпок болот. ◊

12.2. Томпок программалоо маселеси

$$\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n) \le b_i,\ i=1,2,...,m \qquad (12.6)$$

көрүнүшүндөгү барабарсыздыктар системасы жана

$$Z = f(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (12.7)$$

функциясы берилсин. Мындагы бардык $\varphi_i(X), i=1,2,...,m$ функциялары кандайдыр бир M томпок көптүгүндө томпок, ал эми Z функциясы бул көптүктө томпок же иймек болсун. Томпок программалоо маселеси (12.7)-функциясы минималдык (Z функциясы иймек болгон учурда максималдык) мааниге ээ боло тургандай (12.6)-системанын чечимин табууда турат. (Өзгөрүлмөлөрдүн терс эмес болуу шарты (12.6)-системада бар деп эсептөөгө болот).

3-касиеттен СП маселеси томпок программалоо (ТП) маселесинин жекече учуру экендиги алынат. Жалпы учурда ТП маселеси сызыктуу эмес программалоонун маселеси болуп саналат. ТП маселесин өзүнчө класска бөлүү томпок функциялардын экстремалдык касиеттери менен түшүндүрүлөт: томпок функциянын каалагандай локалдык минимуму (иймек функциянын локалдык максимуму) глобалдык да болот; андан сырткары 2-касиеттен туюк чектелген көптүктө берилген томпок (иймек) функция бул көптүктө глобалдык максимумга жана минимумга ээ экендиги алынат. Мындан Z максаттуу функциясы так томпок (так иймек) жана чектөөлөр системасы куру эмес жана чектелген болсо, анда ТП маселеси дайыма жалгыз чечимге ээ болоору келип чыгат. Бул учурда стационардык чекит МБЧКнын ички чекити болсо, анда томпок функциянын минимум (иймек функциянын максимум) чекити МБЧКнын ичинде, антпесе чек арасында жатат. (Жалпы учурда ТП маселесинин чечимдеринин көптүгү томпок көптүк болоорун көрсөтүүгө болот).

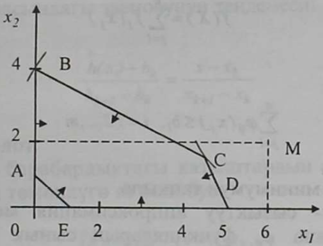
Мисал. Маселени графиктик ыкма менен чыгаргыла.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to extr.$$

◊ Маселенин МБЧКсы $ABCDE$ беш бурчтугу болот. Z функциясынын деңгээл сызыгынын жана өсүү, кемүү багыттарын аныктайбыз. Бардык деңгээл сызыктардын теңдемеси $Z = C$, б.а. $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = C$ түрүндө болот. Ал $C = 1$ болгондо, борбору $M(6;2)$ чекитинде жана радиусу $R = 1$ болгон $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$ айланасын берет. Борбору M чекитинде болгон түрдүү радиустагы айланаларды жүргүзүү менен функция минималдык мааниге $C(4,5;1,5)$ чекитинде, ал эми максималдык мааниге $B(0;4)$ (3-чийме) чекитинде жетишээрин алабыз. Демек, $Z_{max}(0;4) = 40$, $Z_{min}(4,5;1,5) = 2,5$. ◊



3-чийме

12.3. Томпок маселени бөлүкчө-сызыктуу аппроксимация методу менен чыгаруу

Оптималдаштыруунун төмөндөгүдөй томпок маселеси берилсин:

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (12.8)$$

функциясынын

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad i = 1,2,...,m \qquad (12.9)$$

чектөөлөрүндөгү минимумун тапкыла.

$f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциясы *сепарабелдүү* деп аталат, эгерде аны ар бири бир гана өзгөрүлмөдөн көз каранды болгон функциялардын суммасы, б.а.

$$f(X)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \text{ же } f(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болсо.

(12.8)-(12.9)-маселеде f максаттуу функциясы жана φ_i, $i=1,2,...,m$ чектөөлөрү сепарабелдүү функциялар болсун.

Анда (12.8) - (12.9)-маселе төмөнкүчө коюлат:

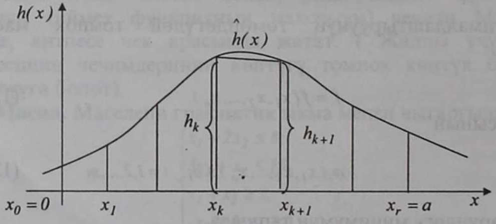
$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{12.10}$$

функциясынын

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(x_j)\le b_i,\ \ i=1,2,...,m \tag{12.11}$$

чектөөлөрдөгү минимумун тапкыла.

Бөлүкчө - сызыктуу аппроксимация методунун идеясы бардык f_j жана φ_{ij} функцияларын сынык сызыктар менен алмаштырууга негизделген. Мында баштапкы томпок маселе сызыктуу программалоо маселесине алынып келинет. Сызыктуу маселенин чечими баштапкы маселенин жакындаштырылган чечимин берет.



4-чийме

Жакындаштырылган маселени түзүү үчүн $[0,a]$ кесиндисинде берилген бир өзгөрүлмөлүү $h(x)$ функциясынын бөлүкчө-сызыктуу аппроксимациясын карайбыз. $[0,a]$ кесиндисин $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_r = a$ чекиттери аркылуу r бөлүккө бөлөбүз. Бөлүү чекиттериндеги функциянын $h_k(x)$, $k = 0,1,...,r$ маанилерин эсептеп чыгабыз. (x_k, h_k) жана (x_{k+1}, h_{k+1}) чекиттерин түз кесиндилер менен бириктиребиз. Бул кесиндилерден турган $\hat{h}(x)$ сынык сызыгы $h(x)$ функциясынын $[0,a]$ кесиндисиндеги аппроксимациясын берет.

$\hat{h}(x)$ сынык сызыгынын (x_k, h_k) жана (x_{k+1}, h_{k+1}) чекиттеринин арасындагы звеносунун теңдемеси:

$$\frac{\hat{h}(x) - h_k}{h_{k+1} - h_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

көрүнүшүндө болот.

Эгерде бул барабардыктагы катыштардын ар бирин λ деп белгилесек, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} x = \lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k, \\ \hat{h}(x) = \lambda h_{k+1} + (1-\lambda)h_k, \end{cases} \qquad (12.12)$$

мында $0 \le \lambda \le 1$. Каалагандай $x \in [x_k, x_{k+1}]$ чекити үчүн (12.12)-шартты канааттандырган λ нын мааниси жалгыз гана болот.

$1 - \lambda = \lambda_k$, $\lambda = \lambda_{k+1}$ белгилөөлөрүн пайдалансак, (12.12)-система төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\begin{cases} x = \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}, \\ \hat{h}(x) = \lambda_k h_k + \lambda_{k+1} h_{k+1}, \end{cases} \qquad (12.13)$$

мында $\lambda_k + \lambda_{k+1} = 1, \lambda_k \ge 0, \lambda_{k+1} \ge 0$.

Мына ошентип, каалагандай $x \in [0,a]$ чекити үчүн сынык сызыктын теңдемесин

$$\begin{cases} x = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k, \\ \hat{h}(x) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k h_k, \sum_{k=0}^{r} \lambda_k = 1, \end{cases} \tag{12.14}$$
$$\lambda_k \geq 0, k = 0,1,...,r$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

Демек, сепарабелдүү томпок маселени чыгаруу үчүн ар бир өзгөрүлмөнүн өзгөрүү интервалын аныктоо керек. Андан кийин ар бир интервал $x_{jk}, j = 1,2,...,n, k = 0,1,...,r$ чекиттери аркылуу бөлүктөргө бөлүнөт жана (12.14)-формуланын жардамында f_i жана φ_{ij} функцияларынын аппроксимациялары түзүлөт. Жыйынтыгында (12.10)-(12.11)-маселенин жакындаштырылган маселеси төмөнкүчө коюлат:

$$\hat{f}(X) = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j) \tag{12.15}$$

функциясынын

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{\varphi}_{ij}(x_j) \leq b_i, \; i = 1,2,...,m, \tag{12.16}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n$$

чектөөлөрүндөгү минималдык маанисин тапкыла.

(12.15) - (12.16)-маселе сызыктуу программалоо маселеси болгондуктан, аны симплекс методдун жардамында чыгарууга болот.

Мисал. $f = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 2)^2$ функциясынын

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

чектөөлөрүндөгү минималдык маанисин тапкыла.

◊ Өзгөрүлмөлөрдүн терс эмес болуу шартынан жана чектөөлөрдөн x_1 чекити 0 дөн 5 ке чейин, ал эми x_2 чекити 0 дөн 4 кө чейин өзгөрөөрүн алабыз. $[0,5]$ кесиндисин $x_{10} = 0, x_{11} = 1, x_{12} = 2, x_{13} = 3, x_{14} = 4, x_{15} = 5$, ал эми $[0,4]$ кесиндисин $x_{20} = 0, x_{21} = 1, x_{22} = 2, x_{23} = 3, x_{24} = 4$ чекиттери аркылуу бөлүктөргө бөлөбүз. Маселенин шартынан

$$f_1(x_1) = (x_1 - 3)^2, f_2(x_2) = 2(x_2 - 2)^2,$$
$$\varphi_{11}(x_1) = x_1, \varphi_{12}(x_2) = 4x_2, \varphi_{21}(x_1) = 3x_1, \varphi_{22}(x_2) = x_2$$

экендигине ээ болобуз. Бул функциялардын бөлүү чекиттериндеги маанилерин эсептеп алабыз.

x_1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_1	0	1	2	3	4	5
φ_{11}	0	1	2	3	4	5
φ_{21}	0	3	6	9	12	15
f_1	9	4	1	0	1	4

x_2	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_2	0	1	2	3	4
φ_{12}	0	4	8	12	16
φ_{22}	0	1	2	3	4
f_2	8	2	0	2	8

(12.14)-формуладан төмөнкүлөрдү алабыз:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{5} \lambda_{1k} x_{1k} = \lambda_{11} + 2\lambda_{12} + 3\lambda_{13} + 4\lambda_{14} + 5\lambda_{15},$$
$$x_2 = \sum_{k=0}^{4} \lambda_{2k} x_{2k} = \lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 3\lambda_{23} + 4\lambda_{24},$$
$$\varphi_{11} = \lambda_{11} + 2\lambda_{12} + 3\lambda_{13} + 4\lambda_{14} + 5\lambda_{15},$$
$$\varphi_{21} = 3\lambda_{11} + 6\lambda_{12} + 9\lambda_{13} + 12\lambda_{14} + 15\lambda_{15},$$
$$\varphi_{12} = 4\lambda_{21} + 8\lambda_{22} + 12\lambda_{23} + 16\lambda_{24},$$
$$\varphi_{22} = \lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 3\lambda_{23} + 4\lambda_{24},$$
$$f_1 = \sum_{k=0}^{5} \lambda_{1k} f_{1k} = 9\lambda_{10} + 4\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{14} + 4\lambda_{15},$$
$$f_2 = \sum_{k=0}^{4} \lambda_{2k} f_{2k} = 8\lambda_{20} + 2\lambda_{21} + 2\lambda_{23} + 8\lambda_{24}.$$

Берилген маселе үчүн (12.15)-(12.16)-жакындаштырылган маселе төмөнкүчө болот:

$$f = 9\lambda_{10} + 4\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{14} + 4\lambda_{15} + 8\lambda_{20} + 2\lambda_{21} + 2\lambda_{23} + 8\lambda_{24}$$

функциясынын

$$\begin{cases} \lambda_{11}+2\lambda_{12}+3\lambda_{13}+4\lambda_{14}+5\lambda_{15}+4\lambda_{21}+8\lambda_{22}+12\lambda_{23}+16\lambda_{24}\le 16, \\ 3\lambda_{11}+6\lambda_{12}+9\lambda_{13}+12\lambda_{14}+15\lambda_{15}+\lambda_{21}+2\lambda_{22}+3\lambda_{23}+4\lambda_{24}\le 15, \\ \lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15}=1, \\ \lambda_{20}+\lambda_{21}+\lambda_{22}+\lambda_{23}+\lambda_{24}=1, \end{cases}$$
$$\lambda_{ij}\ge 0$$

чектөөлөрүндөгү минималдык маанисин тапкыла.

Бул маселе сызыктуу программалоо маселеси болгондуктан, анын чечимин табуу үчүн симплекс методду колдонобуз.

I кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: $\lambda_{10},\lambda_{20},u_1,u_2$.

$$\begin{cases} u_1=16-\lambda_{11}-2\lambda_{12}-3\lambda_{13}-4\lambda_{14}-5\lambda_{15}-4\lambda_{21}-8\lambda_{22}-12\lambda_{23}-16\lambda_{24}, \\ u_2=15-3\lambda_{11}-6\lambda_{12}-9\lambda_{13}-12\lambda_{14}-15\lambda_{15}-\lambda_{21}-2\lambda_{22}-3\lambda_{23}-4\lambda_{24}, \\ \lambda_{10}=1-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15}, \\ \lambda_{20}=1-\lambda_{21}-\lambda_{22}-\lambda_{23}-\lambda_{24}, \end{cases}$$

$$f=9(1-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})+4\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{14}+4\lambda_{15}+8(1-\lambda_{21}-$$
$$-\lambda_{22}-\lambda_{23}-\lambda_{24})+2\lambda_{21}+2\lambda_{23}+8\lambda_{24}=17-5\lambda_{11}-8\lambda_{12}-9\lambda_{13}-8\lambda_{14}-$$
$$-5\lambda_{15}-6\lambda_{21}-8\lambda_{22}-6\lambda_{23}.$$

f функциясынын туюнтулушунда терс коэффициентүү негизги эмес өзгөрүлмөлөр катышкандыктан, I базистик чечим оптималдуу болбойт. Симплекс методдун алгоритимине ылайык λ_{13} өзгөрүлмөсүн негизгиге өткөрөбүз. $\lambda_{13}=min(16/3;15/9;1;\infty)=1$ болгондуктан, λ_{10} өзгөрүлмөсүн негизги эмеске өткөрөбүз.

II кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: $\lambda_{13},\lambda_{20},u_1,u_2$.

$$\begin{cases} u_1=13+3\lambda_{10}+2\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{14}-2\lambda_{15}-4\lambda_{21}-8\lambda_{22}-12\lambda_{23}-16\lambda_{24}, \\ u_2=6+9\lambda_{10}+6\lambda_{11}+3\lambda_{12}-3\lambda_{14}-6\lambda_{15}-\lambda_{21}-2\lambda_{22}-3\lambda_{23}-4\lambda_{24}, \\ \lambda_{13}=1-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{14}-\lambda_{15}, \\ \lambda_{20}=1-\lambda_{21}-\lambda_{22}-\lambda_{23}-\lambda_{24}. \end{cases}$$

$$f=8+9\lambda_{10}+4\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{14}+4\lambda_{15}-6\lambda_{21}-8\lambda_{22}-6\lambda_{23}.$$

Сызыктуу функциянын негизги эмес өзгөрүлмөлөр аркылуу туюнтулушунда абсолюттук белгиси боюнча эң чоң терс коэффициент λ_{22} өзгөрүлмөсүнүн коэффициенти болгондуктан, бул өзгөрүлмөнү негизгиге өткөрөбүз.

$\lambda_{22} = min(13/8;3;\infty;1) = 1$ болгондуктан, λ_{20} өзгөрүлмөсү негизги эмеске өтөт.

III кадам. Негизги өзгөрүлмөлөр: $\lambda_{13}, \lambda_{22}, u_1, u_2$

$$\begin{cases} u_1 = 5 + 3\lambda_{10} + 2\lambda_{11} + \lambda_{12} - \lambda_{14} - 2\lambda_{15} + 8\lambda_{20} + 4\lambda_{21} - 4\lambda_{23} - 8\lambda_{24}, \\ u_2 = 4 + 9\lambda_{10} + 6\lambda_{11} + 3\lambda_{12} - 3\lambda_{14} - 6\lambda_{15} + 2\lambda_{20} + \lambda_{21} - \lambda_{23} - 2\lambda_{24}, \\ \lambda_{13} \ = 1 - \lambda_{10} - \lambda_{11} - \lambda_{12} - \lambda_{14} - \lambda_{15}, \\ \lambda_{22} = 1 - \lambda_{20} - \lambda_{21} - -\lambda_{23} - \lambda_{24}, \end{cases}$$

$$f = 9\lambda_{10} + 4\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{14} + 4\lambda_{15} + 8\lambda_{20} + 2\lambda_{21} + 2\lambda_{23} + 8\lambda_{24}.$$

Бул кадамда оптималдуулуктун критерийи орун алгандыктан, оптималдуу базистик чечим төмөнкүдөй болот:

$$\lambda_{13} = \lambda_{22} = 1, u_1 = 5, u_2 = 4, \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = \lambda_{23} = \\ = \lambda_{24} = 0.$$

Баштапкы өзгөрүлмөлөргө өтүп, өзгөрүлмөлөрдүн

$$x_1 = \lambda_{11} + 2\lambda_{12} + 3\lambda_{13} + 4\lambda_{14} + 5\lambda_{15} = 3, x_2 = \lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 3\lambda_{23} + 4\lambda_{24} = 2$$

маанилерин алабыз. Демек, жакындаштырылган маселенин оптималдуу чечими $(3,2), f_{min} = 0$ болот. ◊

12.4. Түшүү методдору. Томпок программалоо маселесин градиенттик метод менен чыгаруу

Оптималдаштыруунун маселелерин түшүү методу менен чыгаруунун схемасы

$$X_0, X_1, ..., X_n, ... \qquad (12.17)$$

удаалаштыгын түзүүдөн турат. X_0 баштапкы чекити катары мүмкүн болгон көптүктүн каалагандай чекитин алууга болот. Кийинки жакындаштыруулар

$$X_{k+1} = X_k + \lambda l \qquad (12.18)$$

формуласынан аныкталат. Мында $l=(l_1,l_2,...,l_n)$ - кандайдыр бир багыт (б.а.вектор), λ туруктуу сан. l багытын жана λ «кадамдын узундугун» (12.17)-удаалаштык X^* оптималдык чечимине жыйнала тургандай тандап алуу керек.

Жалпы учурда удаалаш X_k жакындаштырууларын алуу процесси чексиз болот, бирок айрым учурда процесс чектүү кадамда аякташы мүмкүн.

Максаттуу функциянын өсүү багыты анын ∇f градиентинин багыты менен дал келгендиктен, иймек функциянын максимумун издөөдө (томпок функциянын минимумун издөөдө) l катары ∇f ($-\nabla f$) алынат жана (12.18)-формула төмөнкү көрүнүшкө келет.

$$X_{k+1}=X_k+\lambda\nabla f(X_k),\lambda>0 \qquad \text{(максимуму изделсе)} \qquad (12.19)$$

же

$$X_{k+1}=X_k-\lambda\nabla f(X_k),\lambda>0 \qquad \text{(минимуму изделсе)} \qquad (12.20)$$

(12.17)-удаалаштыктын жакындаштыруулары (12.19)- же (12.20) -формулалар менен аныкталган методдор *градиенттик методдор* деп аталышат.

Эгерде λ чоңдугу X_k чекитинен X_{k+1} чекитине өтүүдө Δf өсүндүсү эң чоң боло тургандай (f_{max} изделсе) же эң кичине боло тургандай (f_{min} изделсе) тандалып алынса, градиенттик метод *ылдам түшүү методу* деп аталат.

Демек, ылдам түшүү методунда кадамдын узундугу λны $\Delta f=f(X_{k+1})-f(X_k)$ функциясы экстремумга ээ боло тургандай тандап алуу керек. (X_{k+1} чекитин аныктоодо X_k белгилүү, б.а. $f(X_k)$ жана $\nabla f(X_k)$ туруктуу чоңдуктар болот. Ал эми Δf өсүндүсү λдан көз каранды функция болот.)

Δf функциясын (12.19)-формуланы жана X_k чекитиндеги градиенттин $\nabla f(X_k)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_k),\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_k),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_k)\right)$ экендигин эске алуу менен дифференцирлеп, экстремумдун $\frac{d\Delta f}{d\lambda}=0$ зарыл шартынан төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_{k+1})\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_k)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_{k+1})\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_k)+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_{k+1})\cdot\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_k)=0. \qquad (12.21)$$

Мындан скалярдык көбөйтүндүнү пайдалансак, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\nabla f(X_{k+1}) \cdot \nabla f(X_k) = 0 \, . \qquad (12.22)$$

Эгерде маселе оптималдык мааниге чечимдердин көптүгүнүн ички чекиттеринде ээ болсо, (12.19)- же (12.20)-формулалар боюнча эсептелинген X_{k+1} чекитинин аймактын чегинен чыгып кетүүсү кыйынчылыкты пайда кылбайт. Мында λ (12.21)-формула боюнча эле табылат.

1-мисал. $f = 5-(x_1-4)^2-(x_2-5)^2$ функциясынын

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

чектөөлөрүндөгү максимумун тапкыла.

◊ $-f$ функциясы x_1, x_2 лердин каалагандай маанилеринде томпок болгондуктан (муну өз алдынарча текшергиле), берилген функция иймек болот. Ошондуктан, функциянын локалдык максимуму глобалдыгы менен дал келет. Чектөөлөр системасынын чечимдеринин көптүгү 5-чиймеде келтирилген.

Баштапкы чекит катары $X_0(1;2)$ чекитин алабыз. Градиентти жана анын $X_0(1;2)$ чекитиндеги маанисин табалы:

$$\nabla f = (8-2x_1; 10-2x_2), \qquad (12.23)$$
$$\nabla f_0(X_0) = (6;6).$$

(12.19)-дан

$$X_1 = X_0 + \lambda \nabla f(X_0) = (1;2) + \lambda(6;6) = (1+6\lambda; 2+6\lambda).$$

келип чыгат. Муну (12.23)-гө коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\nabla f_1(X_1) = (8-2(1+6\lambda); 10-2(2+6\lambda)) = (6-12\lambda; 6-12\lambda).$$

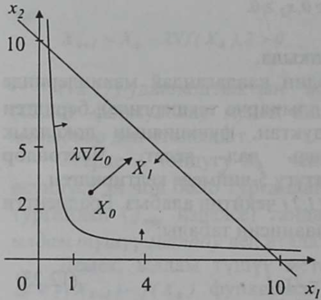
Эми λ ны аныктоо үчүн (12.22)- ни пайдаланабыз.

$\nabla f_1 \cdot \nabla f_0 = 0$, б.а. $6(6-12\lambda)+6(6-12\lambda)=0;\ 1-2\lambda=0;\ \lambda=\frac{1}{2}.$

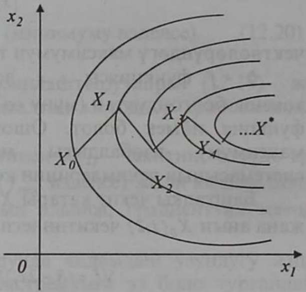
Бул маанини X_1 жана ∇f_1 ге коюп, төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$X_1 = \left(1+6\cdot\frac{1}{2};2+6\cdot\frac{1}{2}\right)=(4;5);\ \nabla f_1 = \left(6-12\cdot\frac{1}{2};6-12\cdot\frac{1}{2}\right)=(0;0).$$

(4;5) чекитиндеги градиент нөлгө барабар болгондуктан, X_1 функциянын максимум чекити болот жана $f_{max}=5$ (Бир кадамда эле так оптимум алынды. Бирок, бул жалпы мыйзам ченемдүүлүк болуп саналбайт. Оптималдык чечими көп сандагы кадамдан кийин алынган маселелер жана каалагандай чектүү сандагы кадамдан кийин жакындаштырылган чечими алынган маселелер да бар). ◊



5-чийме



6-чийме

Эки өзгөрүлмөлүү функциялар үчүн ылдам түшүү методу жөнөкөй геометриялык талкууланышка ээ. Каалагандай k үчүн X_k чекитинен X_{k+1} чекитине кетүүчү жаа X_k чекити аркылуу өтүүчү Z функциясынын деңгээл сызыгына перпендикуляр (анткени градиенттин багыты менен бирдей) жана X_{k+1} чекити аркылуу өтүүчү деңгээл сызык менен жанышат (анткени ал (12.20)-нын негизинде кийинки жаага перпендикуляр болот жана өз кезегинде бул деңгээл сызыкка перпендикуляр). Мына ошентип, тегиздикте ылдам түшүү 6-чиймеде көрсөтүлгөндөй өз ара эки перпендикуляр багыт боюнча жүргүзүлөт.

Эскертүү. Эсептөөлөрдү жөнөкөйлөтүү үчүн (12.19)- жана

(12.22)-формулалардагы ∇f_k нын ордуна ошол эле багыттагы каалагандай векторду алууга, б.а. координаталарын оң санга көбөйтүүгө же бөлүүгө болот.

2-мисал. $f = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1$ функциясынын $x_1^2 + x_2^2 \le 4; x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$ чектөөлөрүндөгү минималдык маанисин 0,01 тактыгында тапкыла.

◊ Жекече туундуларын таап, максаттуу функция үчүн градиентти жазалы

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 - 1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - 1,$$

$$\nabla f = (4x_1 - x_2 - 1; -x_1 + 2x_2 - 1).$$

Баштапкы чекит катары чечимдердин көптүгүндө жаткан (1;1) чекитин алабыз. f функциясы томпок функция болгондуктан X_k чекиттерин аныктоо үчүн (12.20)-формуланы пайдаланабыз. ∇f_k векторунун ордуна багыты ушундай эле болгон, бирок жөнөкөй координаталуу l_k векторун алууга болот. Кадамдын узундугу λ (12.22)-формуладан аныкталат.

I кадам. $X_0 = (1;1)\ \nabla f_0 = (4\cdot 1 - 1 - 1; -1 + 2\cdot 1 - 1) = (2;0),$

$$X_1 = X_0 - \lambda\nabla f_0 = (1;1) - \lambda(2;0) = (1 - 2\lambda; 1),$$

$$\nabla f_1 = (4\cdot(1-2\lambda) - 1 - 1; -1 + 2\lambda + 2\cdot 1 - 1) = (2 - 8\lambda; 2\lambda),$$

$$\nabla f_0 \cdot \nabla f_1 = (2;0)\cdot(2 - 8\lambda; 2\lambda) = 4 - 16\lambda + 0\cdot 2\lambda = 4 - 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4},$$

$$X_1 = \left(1 - 2\cdot\frac{1}{4}; 1\right) = \left(\frac{1}{2}; 1\right); \nabla f_1 = \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

II кадам. ∇f_1 вектору катары $l_1 = (0;1)$ вектору алынат. Анда

$$X_2 = X_1 - \lambda l_1 = \left(\frac{1}{2}; 1\right) - \lambda(0;1) = \left(\frac{1}{2}; 1 - \lambda\right),$$

$$\nabla f_2 = \left(4\cdot\frac{1}{2} - (1-\lambda) - 1; -\frac{1}{2} + 2(1-\lambda) - 1\right) = \left(\lambda; \frac{1}{2} - 2\lambda\right),$$

$$l_1 \cdot \nabla f_2 = (0;1)\cdot\left(\lambda; \frac{1}{2} - 2\lambda\right) = 0\cdot\lambda + 1\cdot\left(\frac{1}{2} - 2\lambda\right) = \frac{1}{2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4},$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right); \nabla f_2 = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}; 0\right).$$

III кадам. ∇f_2 вектору катары $l_2=(1;0)$ вектору алынат. Анда

$$X_3=X_2-\lambda l_2=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)-\lambda(1;0)=\left(\frac{1}{2}-\lambda;\frac{3}{4}\right),$$

$$\nabla f_3=\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{3}{4}-1;-\frac{1}{2}+\lambda+2\cdot\frac{3}{4}-1\right)=\left(\frac{1}{4}-4\lambda;\lambda\right),$$

$$l_2\cdot\nabla f_3=1\cdot\left(\frac{1}{4}-4\lambda\right)+0\cdot\lambda=\frac{1}{4}-4\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{16},$$

$$X_3=\left(\frac{1}{2}-\lambda;\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}\right)=(0{,}4375;0{,}75);\nabla f_3=\left(\frac{1}{4}-4\lambda;\lambda\right)=\left(0;\frac{1}{16}\right).$$

IV кадам. $l_3=(0;1)$ деп алабыз. Анда

$$X_4=X_3-\lambda l_3=\left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}\right)-\lambda(0;1)=\left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}-\lambda\right),$$

$$\nabla f_4=\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}+\lambda-1;-\frac{7}{16}+\frac{3}{2}-2\lambda-1\right)=\left(\lambda;\frac{1}{16}-2\lambda\right),$$

$$l_3\cdot\nabla f_4=0\cdot\lambda+1\cdot\left(\frac{1}{16}-2\lambda\right)=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{32},$$

$$X_4=\left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}-\lambda\right)=\left(\frac{7}{16};\frac{23}{32}\right)=(0{,}4375;0{,}71875)$$

$$\nabla f_4=\left(\lambda;\frac{1}{16}-2\lambda;\right)=\left(\frac{1}{32};0\right).$$

V кадам. $l_4=(1;0)$ деп алабыз. Анда

$$X_5=X_4-\lambda l_4=\left(\frac{7}{16};\frac{23}{32}\right)-\lambda(1;0)=\left(\frac{7}{16}-\lambda;\frac{23}{32}\right),$$

$$\nabla f_5=\left(\frac{7}{4}-4\lambda-\frac{23}{32}-1;-\frac{7}{16}+\lambda+\frac{23}{16}-1\right)=\left(\frac{1}{32}-4\lambda;\lambda\right),$$

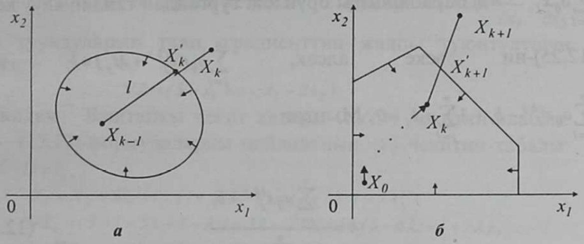
$$l_4\cdot\nabla f_5=1\cdot\left(\frac{1}{32}-4\lambda\right)+0\cdot\lambda=\frac{1}{32}-4\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{128},$$

$$X_5=\left(\frac{55}{128};\frac{23}{32}\right)=(0{,}4296875;0{,}71875).$$

X_4 жана X_5 чекиттеринин тиешелүү координаталарынын айрымасы $0{,}01$ден кичине болгондуктан, оптималдуу чечим үчүн $X^*\approx(0{,}43;0{,}72)$ чекитин алууга болот. ◊

Эми ТП маселесин максаттуу функция оптималдык мааниге мүмкүн болгон көптүктүн чек аралык чекитинде ээ болгон учурда карайбыз. Бул учурда да X_0 баштапкы чекити катары чечимдердин көптүгүнүн каалагандай чекитин алып, (12.19)- же

(12.20)-формула боюнча удаалаш жакындаштырууларды эсептөөнүн кандайдыр бир кадамында X_k чекити чечимдердин көптүгүндө жатпай калат (7,а-чийме). Анда X_k чекитинин ордуна түшүү багыты менен чечимдердин көптүгүнүн кесилиш X_k' чекити каралат. Ал эми бардык кийинки чекиттер кадимки ылдам түшүү методу менен аныкталган чекиттерди чек аралык чекиттердин көптүгүнө проекциялоодон алынат. Биздин курста проекциялоонун жалпы оператору каралбагандыктан, чектөөлөр системасы сызыктуу, б.а. эки өзгөрүлмөлүү учурда чечимдердин көптүгү түздөрдүн кесиндилери менен чектелген учур менен чектелебиз (7,б-чийме).



7-чийме

Бул учурда маселенин чектөөлөр системасы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1,2,...,m \tag{12.24}$$

көрүнүшүндө болот.

Ылдам түшүү методу боюнча $X_0, X_1, ..., X_k, X_{k+1}$ жакындаштырууларын таптык дейли. Мындагы $X_0, X_1, ..., X_k$ чекиттери чечимдердин көптүгүнө таандык, ал эми X_{k+1} чекити таандык эмес болсун. Демек, бул чекиттин координаталары (12.24)-системанын барабарсыздыктарынын жок дегенде бирин канааттандырбайт. Айталы ал $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ барабарсыздыгы болсун, мында i- конкреттүү барабарсыздыктын номери.

$X_k(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)})$, $X_{k+1}(x_1^{(k+1)},...,x_n^{(k+1)})$ жана $X_{k+1}=X_k+\lambda l$, б.а.

$$x_j^{(k+1)}=x_j^{(k)}+\lambda l_j,\ j=1,2,...,n \tag{12.25}$$

болсун. Мында $l=(l_1,l_2,...,l_n)$ - максимумду издөөдө $\nabla f(X_n)$ багыты же минимумду издөөдө $-\nabla f(X_n)$ багыты менен дал келүүчү түшүү багыты. Чечимдердин көптүгүнүн чегинен чыкпоо үчүн X_{k+1} чекитинин ордуна ошол эле түшүү багытында жаткан, б.а. координаталары (12.25)-барабардыкты канааттандырган, бирок λ узундугу кичине болгон чекитти алуу керек. λ ны чекит чечимдердин көптүгүнүн чек арасында жата тургандай, б.а. $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k+1)}=b_i$ барабардыгы орун ала тургандай тандап алуу керек.

(12.25)-ни эске алсак, $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j^{(k)}+\lambda l_j)=b_i$ жана $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}-b_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}l_j=0$. Мындан

$$\lambda=-\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}-b_i}{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}l_j} \tag{12.26}$$

барабардыгына ээ болобуз.

(12.26)-формула түшүү багыты чечимдердин көптүгүн кесип өткөн учурдагы λ нын маанисин берет. X_{k+1} чекитинин координаталары бир учурда (12.24)-системанын бир нече барабарсыздыгын канааттандырбаса, анда λ нын маанисин (12.26)- формула боюнча ар бир барабарсыздык үчүн аныктап, табылган маанилердин ичинен эң кичинесин алуу керек. Аны (12.25)-ге коюп, X'_{k+1} чекитин аныктайбыз. $\nabla f(X'_{k+1})$ градиентинин проекциясы чектөөлөрү сызыктуу маселеде чечимдердин көптүгүнүн чек арасында, эки өзгөрүлмөлүү учур үчүн $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ түз сызыгында жаткандыктан, l түшүү ылдамдыгы кийинки кадамда ушул түздөн алынат. Оптималдык маани градиент чечимдердин көптүгүнүн чегине перпендикуляр болгон чекитте алынат.

Эскертүү. Эгерде түз сызык тегиздикте $Ax + By + C = 0$ теңдемеси менен берилсе, анда анын багыты $l' = (B; -A)$ же $l'' = (-B; A)$ вектору менен берилет.

3-мисал. Ылдам түшүү методун пайдаланып, $Z = 5x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ функциясынын

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

чектөөлөрүндөгү максималдык маанисин тапкыла.

◊ Z функциясы иймек экендигин, б.а. берилген маселе ТП маселеси экендигин белгилей кетебиз. Z функциясынын $\frac{\partial Z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Z}{\partial x_2}$ жекече туундуларын таап, градиенттин жалпы туюнтулушун жазабыз:

$$\nabla Z = (5 - x_1 + x_2; x_1 - 2x_2).$$

I кадам. Баштапкы чекит катары $X_0(1;1)$ чекитин алабыз. (12.18)-, (12.19)-формулаларды пайдаланып, X_1 чекитин табалы:
$\nabla Z_0 = (5;-1) = l_0$,

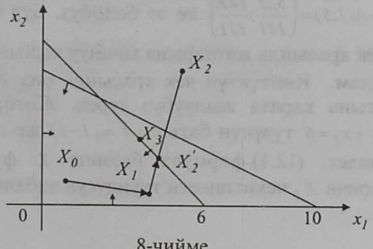
$$X_1 = X_0 + \lambda l_0 = (1;1) + \lambda(5;-1) = (1 + 5\lambda; 1 - \lambda),$$

$$\nabla Z_1 = (5 - 1 - 5\lambda + 1 - \lambda; 1 + 5\lambda - 2 + 2\lambda) = (5 - 6\lambda; -1 + 7\lambda),$$

$$l_0 \cdot \nabla Z_1 = 5 \cdot (5 - 6\lambda) + (-1) \cdot (-1 + 7\lambda) = 26 - 37\lambda = 0.$$

Мындан $\lambda = \frac{26}{37}$, б.а. $X_1 = \left(1 + 5 \cdot \frac{26}{37}; 1 - \frac{26}{37}\right) = \left(\frac{167}{37}; \frac{11}{37}\right) \approx (4{,}6; 0{,}3)$.

$4{,}6 + 0{,}6 < 10$ жана $4{,}6 + 0{,}3 < 6$ болгондуктан, X_1 чечимдердин көптүгүнүн ички чекити (8-чийме).



8-чийме

II кадам. $\nabla Z_1 = \left(5 - \frac{167}{37} + \frac{11}{37}; \frac{167}{37} - 2\cdot\frac{11}{37}\right)$ табабыз. Муну эсептебестен эле, биринчи компонентасынын оң экендигине ынануу гана жетиштүү. $l_1 = (1;5)$ деп алабыз. (Чындыгында $l_1 \perp l_0$, анткени $l_1 \cdot l_0 = 1\cdot 5 + 5\cdot(-1) = 0$. l_1 дин багыты ∇Z_1 дин багыты менен бирдей).

Эми

$$X_2 = X_1 + \lambda l_1 = \left(\frac{167}{37}; \frac{11}{37}\right) + \lambda(1;5) = \left(\frac{167}{37} + \lambda; \frac{11}{37} + 5\lambda\right),$$

$$\nabla Z_2 = \left(5 - \frac{167}{37} - \lambda + \frac{11}{37} + 5\lambda; \frac{167}{37} + \lambda - \frac{22}{37} - 10\lambda\right) =$$

$$= \left(\frac{29}{37} + 4\lambda; \frac{145}{37} - 9\lambda\right).$$

$l_1 \cdot \nabla Z_2 = 1\cdot\left(\frac{29}{37} + 4\lambda\right) + 5\cdot\left(\frac{145}{37} - 9\lambda\right) = 0$, мындан $41\lambda = \frac{754}{37}$, б.а. $\lambda \approx 0{,}50$

жана $X_2 \approx (5{,}01; 2{,}78)$. X_2 чектөөлөр системасынын биринчи жана экинчи барабарсыздыктарын канааттандырбайт, б.а. чечимдердин көптүгүндө жатпайт. (11.26)-формула боюнча ар бир барабарсыздык үчүн λ нын маанисин эсептейбиз:

$$\lambda' = -\frac{167/37 + 2\cdot 11/37 - 10}{1 + 2\cdot 5} \approx 0{,}445,$$

$$\lambda'' = -\frac{167/37 + 11/37 - 6}{1+5} = \frac{22}{111} \approx 0{,}2.$$

$\lambda = \min\{\lambda', \lambda''\} = \frac{22}{111}$ алабыз жана $X_2' = X_1 + \lambda l_1 = \left(\frac{167}{37}; \frac{11}{37}\right) + \lambda(1;5) = \left(\frac{523}{111}; \frac{143}{111}\right)$ кө ээ болобуз. Бул чекит көптүктүн $x_1 + x_2 = 6$ чек арасында жатаарына ынануу кыйын эмес.

III кадам. Көптүктүн чек арасында биз Z функциясынын өсүү багытына карата жылуубуз керек. Жогорудагы эскертүү боюнча $x_1 + x_2 = 6$ түзүнүн багыты $l' = (1;-1)$ же $l'' = (-1;1)$ вектору менен берилет. (12.1)-формула боюнча Z функциясынын l' багыты боюнча X_2' чекитиндеги туундусун табалы:

$$\frac{\partial Z}{\partial l'}\left(X_2'\right)=\frac{\partial Z}{\partial x_1}\left(X_2'\right)\cdot 1+\frac{\partial Z}{\partial x_2}\left(X_2'\right)\cdot(-1)=$$

$$=\left(5-\frac{523}{111}+\frac{143}{111}\right)-\left(\frac{523}{111}-2\cdot\frac{143}{111}\right)<0.$$

Демек, бул багыт боюнча Z функциясы кемийт жана түшүү багыты катары $l''=(-1;1)$ векторун алабыз.

Ошентип, $l_2=(-1;1)$, $X_3=X_2'+\lambda l_2=\left(\frac{523}{111};\frac{143}{111}\right)+\lambda(-1;1)=$ $=\left(\frac{523}{111}-\lambda;\frac{143}{111}+\lambda\right)$. Мындан ары мурунку кадамдардагыдай эле эсептөөлөрдү жүргүзөбүз:

$$\nabla Z_3=\left(5-\frac{523}{111}+\lambda+\frac{143}{111}+\lambda;\frac{523}{111}-\lambda-\frac{286}{111}-2\lambda\right)=$$

$$=\left(\frac{175}{111}+2\lambda;\frac{237}{111}-3\lambda\right).$$

$$l_2\cdot\nabla Z_3=0\to\left(\frac{175}{111}+2\lambda\right)\cdot(-1)+\left(\frac{237}{111}-3\lambda\right)\cdot 1=\frac{62}{111}-5\lambda=0.$$

Мындан $\lambda=\frac{62}{555}$ жана $X_3=\left(\frac{523}{111}-\frac{62}{111};\frac{143}{111}+\frac{62}{111}\right)=(4{,}6;1{,}4)$. $4{,}6+2{,}8<10$ болгондуктан, X_3 чекити маселенин чечими болуп саналат.

$\frac{\partial Z}{\partial l_2}(X_3)=(5-4{,}6+1{,}4)\cdot(-1)+(4{,}6-2{,}8)\cdot 1=0$ болгондуктан, градиенттин бул багыттагы проекциясы 0гө барабар. Демек, функциянын берилген чектөөлөрдөгү оптималдык маанисине жетиштик.

Ошентип, $X^*=(4{,}6;1{,}4)$ жана $Z_{max}=5\cdot 4{,}6-\frac{1}{2}(4{,}6)^2+$ $+4{,}6\cdot 1{,}4-(1{,}4)^2=16{,}9$. ◊

12.5. Параметрдик жана стохастикалык программалоо жөнүндө түшүнүк

Параметрдик программалоо. Экономикалык практикада математикалык моделдеринде сызыктуу форманын же чектөөлөр системасынын коэффициенттери (же экөөндө да) туруктуу сан эмес, кандайдыр бир параметрлерге карата өзгөрүүчү болгон маселелер сейрек эмес кездешет. Мисалы, ресурстарды оптималдуу пайдалануу (өндүрүштү оптималдуу пландаштыруу) жөнүндөгү маселеде продукцияны сатуудан түшкөн пайда (же баасы) сезондуу мүнөзгө ээ жана убакыттан функция болушу мүмкүн, ал эми ресурстардын запастары жана технологиялык коэффициенттер убакытка, өндүрүштүн технологиясына, кампанын сыйымдуулугуна ж.б. карата өзгөрүшү мүмкүн.

Параметрдик программалоо максаттуу функциясы жана чектөөлөрү параметрлерден көз каранды болгон экстремалдык маселелерди карайт, параматрлердин маанилеринин жыйындысы үчүн оптималдык маанилерди табуунун методдорун иштеп чыгат жана параметрлердин өзгөрүүсүндөгү бул маселелердин оптималдык пландарынын өзгөрүшүн үйрөтөт.

Эң жөнөкөй жана жакшы изилденген болуп бир параметрлүү *сызыктуу параметрдик программалоо* саналат. Бул маселе төмөнкүчө коюлат: $F_t = \sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)x_j$ сызыктуу функциясынын $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,2,...,m$ чектөөлөрүндө жана өзгөрүлмөлөрдүн $x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n$ терс эмес болуу шарттарында максималдык маанисин тапкыла. Мында c_j, d_j, a_{ij}, b_i - берилген туруктуулар, ал эми t болсо, α дан β га чейин өзгөрүүчү параметр: $t \in [\alpha; \beta]$.

Маселени чечүүнүн натыйжасында t параметринин маанилеринин $[\alpha; \beta]$ кесиндиси чектүү сандагы кесиндилерге алардын ар биринде F_t сызыктуу функциясы максималдык мааниге чечимдердин көп грандыгынын бир эле чокусунда эле боло тургандай бөлүү керек. Ошону менен бирге параметрдин маанилеринин ар бир аралыгы үчүн оптимум жана оптималдык чечим табылат.

Стохастикалык программалоо ыктымалдуу (стохастикалык) мүнөздөгү оптималдаштыруу маселелерин чечүүнүн методдорунун жыйындысын берет. Эгерде максаттуу функциянын же чектөөлөр системасынын (же экөөндө да) параметрлерин кокустук чоңдуктар катары карасак, ресурстарды оптималдуу пайдалануу жөнүндөгү маселе, транспорттук маселе ж.б. лар стохастикалык программалоо программалоонун маселелери болуп калышат. Бул маселелер стохастикалык коюлушунда экономикалык чындыкты толугураак чагылдырат.

Стохастикалык маселелерди чыгарууда бардык кокустук чоңдуктардын орточо маанилерин таап жана мындай маселелерди кадимки, детерминирленген математикалык программалоонун маселесине келтирүү жеңилирээк болот. Бирок мындай ыкма дайыма эле эффективдүү эмес, анткени кокустук чоңдуктардын кандайдыр бир маанилери оптималдык чечимден алыс чечимге же чечимдин жашабашына да алып келүүсү мүмкүн.

Башка ыкмасы, биринчи этапта детерминирленген маселени чечүүнүн негизинде алгачкы оптималдык планды табуудан турат. Экинчи этапта (кийинкилерде) бул оптималдык план параметрлердин реалдуу статистикалык мүнөздөөчүлөрүнө тиешелеш корректировкаланат. Бул ыкма ресурстарды оптималдуу пайдалануу жөнүндөгү жана транспорттук маселелерде продукцияларга болгон талап анык эмес болгон учурда колдонулат.

Көнүгүүлөр

12.1. Төмөнкү функцияларды томпоктукка изилдегиле:

а) $f(x)=\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}$;

б) $f(x)=ln(e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3})$;

в) $f(x)=5-x_1^2-x_2^2$;

г) $f(x)=-x_1x_2+2x_1$;

д) $f(x)=e^{2x_1-x_2}$.

12.2. ТП маселесин графиктик ыкма менен тапкыла.

$$\begin{cases} x_2 \le 4 - x_1^2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = 2 - x_1^2 - x_2^2 \to max.$$

12.3.-12.6- ТП маселелерин бөлүкчө-сызыктуу аппроксимация методу менен чыгаргыла.

12.3.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to max.$$

12.4.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = -(x_1 - 4) + (x_2 - 3)^2 \to max.$$

12.5.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = 4(x_1 - 1) + 16(x_2 - 5)^2 \to min.$$

12.6.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{cases}$$

чектөөлөрүндө

$$Z = 4x_1^2 + 3x_2^2 \to min.$$

12.7. $Z = x_1^2 + 3x_2^2$ функциясы үчүн:

а) функциянын ∇Z градиентинин жалпы туюнтмасын жазгыла;

б) $\nabla Z(1,-2)$ градиентин тапкыла жана чиймеде сүрөттөгүлө;

в) $l = (-1,1)$ багыты боюнча туундусун тапкыла.

12.8. 12.7-маселени $Z = x_1^2 - x_2 + 4$ болгон учурда чыгаргыла.

XIII глава. ДИНАМИКАЛЫК ПРОГРАММАЛООНУН МОДЕЛДЕРИ

13.1. Динамикалык программалоо маселесинин жалпы коюлушу

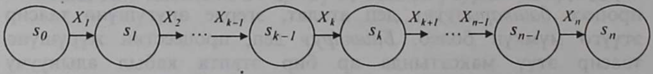
Динамикалык программалоо (ДП) оптималдаштыруунун кээ бир типтеги маселелерин чечүүнүн методу болуп саналат. Аталышы көрсөтүп тургандай, динамикалык программалоо убакыттуу процесс менен байланышкан. Бирок бул метод убакыт мааниге ээ болбогон маселелерде да колдонулат. Мына ошентип, динамика чечилүүчү маселелерде эмес, чечүүнүн методунда болот. Чечүү процесси убакыт боюнча удаалаш чечилүүчү жана жыйынтыгында изделүүчү чечимге алып келүүчү этаптарга бөлүктөнөт. Улам, кадамдык оптималдаштыруу идеясы динамикалык программалоонун негизин түзөт. Бир кадамды (этапты) оптималдаштыруу, бүтүндөй процессти оптималдаштырууга караганда жеңил: бир жолу татаал маселени чечүү көп жолу салыштырмалуу жеңил маселени чечүүгө караганда татаал болот. ДПнын маселелери *көп кадамдуу* же *көп этаптуу* деп аталышат.

ДП теориясын иштеп чыгууда америкалык математик Ричард Беллман чоң салым кошкон. Биринчи жолу бул метод менен запастарды оптималдуу башкаруу маселелери чыгарылган, кийин маселелердин классы кеңейип барган. Оптималдаштыруунун практикалык методу катары ДПнын методу компьютерлерди колдонууга мүмкүндүк берет. ДП көп кадамдуу башкаруу процесстерин жана убакыттан көз каранды болгон процесстерди оптималдуу пландаштырууга мүмкүндүк берүүчү математикалык аппарат болуп эсептелет. Экономикалык процесс *башкарылуучу* деп аталат, эгерде өнүгүшүнө таасир этүүгө мүмкүн болсо. *Башкаруу* деп, процесстин жүрүшүнө таасир этүү максатында ар бир этапта кабыл алынуучу чечимдердин жыйындысын айтабыз. Экономикалык процесстерде башкаруу ар бир кадамда каражаттарды бөлүштүрүү жана кайра бөлүштүрүүдө турат. Мисалы, каалагандай ишканада продукцияны өндүрүү - башкарылуучу процесс, анткени ал жабдыктардын курамынын өзгөрүшү, алып келинген сырьенун көлөмү, каржылоо чоңдугу ж.б. менен аныкталат. Пландаштырылуучу мезгилдин ар бир жылынын башталышында ишкананы сырье менен камсыз кылуу, жабдыктарды алмаштыруу, каржылоонун өлчөмү ж.б. боюнча кабыл алынуучу чечимдердин жыйындысы башкаруу болуп саналат. Мына ошентип, продукцияны өндүрүүнү өнүгүшүнө ар бир этапта таасир этүүгө мүмкүн болгон, бир нече этаптан турган экономикалык процесс катары эсептөөгө болот. ДП маселесин чечүү оптималдаштыруунун баштапкы маселеси үчүн оптималдуу башкарууну удаалаш алууга мүмкүндүк берет.

ДП маселесинин жалпы коюлушун карайлы. Башкарылуучу процесс каралат. Мисалы, каражаттарды ишканалардын арасында бөлүштүрүү, ресурстарды бир нече жыл ичинде пайдалануу, жабдыктарды алмаштыруу, запастарды толуктоо ж.б.у.с. экономикалык процесстер. Натыйжада S башкарылуучу системасы s_0 баштапкы абалынан $\bar{s}$ абалына өтөт. Башкарууну n кадамга бөлүүгө болот, б.а. чечим ар бир кадамда удаалаш кабыл алынат, ал эми S системасын баштапкы абалдан акыркы абалга өткөрүүчү башкаруу n кадамдуу башкаруулардын жыйындысынан турат деп божомолдойбуз.

X_k аркылуу $k = 1,2,...,n$ - кадамдагы башкарууну белгилейбиз. X_k өзгөрүлмөлөрү берилген кандайдыр бир чектөөлөрдү канааттандырышса, анда алар *мүмкүн болгон башкаруулар* деп аталышат. (X_k - сан, n ченемдүү мейкиндиктеги чекит, сапаттык белги болуусу мүмкүн).

$X(X_1, X_2, ..., X_n)$ – S системасын s_0 баштапкы абалынан $\bar{s}$ акыркы абалына өткөрүүчү башкаруу болсун. s_k аркылуу башкаруунун k-кадамынан кийинки системанын абалын белгилейли. Абалдардын $s_0, s_1, ..., s_{k-1}, s_k, ..., s_{n-1}, s_n = \bar{s}$ удаалаштыгын алабыз. Аларды тегерекчелер менен сүрөттөйбүз (1-чийме).



1 – чийме

Каралуучу башкарылуучу операциянын эффективдүүлүк көрсөткүчү же максаттуу функция баштапкы абалдан жана башкаруудан көз каранды:

$$Z = F(s_0, X). \qquad (13.1)$$

Бир нече божомолдоолорду кабыл алабыз.

1. k- кадамдан кийинки системанын s_k абалы өзүнөн мурунку s_{k-1} абалынан жана k- кадамдагы X_k башкаруусунан гана көз каранды (андан мурунку абалдардан жана башкаруулардан көз каранды эмес). Бул талап «*кийинки таасири жок*» деп аталат.

Айтылгандарды *абалдардын теңдемелери* деп аталуучу

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k),\ k = 1,2,...,n \qquad (13.2)$$

теңдемелери түрүндө жазууга болот.

2. (13.1)-максаттуу функция ар бир кадамдын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүнүн суммасына барабар. k-кадамдын эффективдүүлүк көрсөткүчүн

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k),\ k = 1,2,...,n \qquad (13.3)$$

деп белгилейли.

Анда

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, X_k). \qquad (13.4)$$

ДП маселеси төмөнкүчө коюлат: *(13.4) – максаттуу функция эң чоң (эң кичине) мааниге ээ боло тургандай, S системасын s_0 абалынан ϵ абалына өткөрүүчү X башкаруусун аныктоо талап кылынат.*

ДП моделинин өзгөчөлүктөрү:

1. Оптималдаштыруу маселеси башкаруунун n кадамдуу процесси катары каралат.

2. Максаттуу функция ар бир кадамдагы максаттуу функциялардын суммасына барабар.

3. k-кадамдагы башкарууну тандоо системанын ушул кадамга чейинки абалынан гана көз каранды жана андан мурунку кадамдарга таасирин тийгизбейт (тескери байланыш жок).

4. k- кадамдан кийинки s_k абалы өзүнөн мурунку s_{k-1} абалынан жана X_k башкаруусунан гана көз каранды (кийинки таасирдин болбоосу).

5. Ар бир кадамда X_k башкаруусу чектүү сандагы башкаруучу өзгөрүлмөлөрдөн, ал эми s_k абалы чектүү сандагы параметрлерден көз каранды.

Бул сыяктуу маселелерди чечүүнүн функциялардын жана чектөөлөрдүн түрүнө, ченемдүүлүгүнө жараша колдонулуучу түрдүү ыкмалары бар. Функциялардын жана чектөөлөрдүн берилишинен көз каранды болбогон ДПнын эсептөө схемасын карайбыз. Эсептөө схемасы оптималдуулук принциби менен байланышкан жана анда рекуренттүү катыштар пайдаланылат.

13.2. Оптималдуулук принциби жана Беллмандын теңдемелери

Оптималдуулук принциби. *Кандайдыр бир сандагы кадамдардан кийин S системасынын абалы кандай гана болбосун, жакынкы кадамда башкарууну, бардык кийинки кадамдардагы оптималдуу башкаруулар менен бирдикте учурдагы кадамдан баштап бардык кийинки кадамдарда оптималдуу утушту камсыз кыла тургандай тандоо керек.*

Бул принцип биринчи 1953 - жылы Р.Беллман тарабынан сунушталган. Ал бул принцип туура болуучу шарттарды да көрсөткөн. Негизги талап – башкаруу процессинин тескери байланышсыз болуусу, б.а. ар бир кадамдагы башкаруу өзүнөн мурунку кадамдарга таасир этпөөсү керек.

Оптималдуулук принцибинен тескери байланышсыз каалагандай процесс үчүн оптималдуу башкаруу каалагандай камтылуучу процесс үчүн бул камтылуучу процесстин баштапкы абалына карата оптималдуу боло тургандыгы келип чыгат. Ошондуктан ар бир кадамдагы чечим жалпы башкаруу үчүн да эң жакшы болуп эсептелет. Эгерде оптималдуу траекторияны сынык сызык түрдө геометриялык сүрөттөсөк, анда бул сынык сызыктын каалагандай бөлүгү башы жана аягына карата оптималдуу траектория болот.

Беллмандын теңдемелери. Кадамдарынын саны фиксирленген n жана баштапкы абалы s_0 болгон ДПнын баштапкы маселесинин (13.1 – пунктту к.) ордуна $n = 1,2,...$ деп алып, түрдүү s те – бир кадамдуу, эки кадамдуу ж.б. маселелердин удаалаштыгын оптималдуулук принцибин колдонуу менен карайбыз.

Бир катар жаңы белгилөөлөрдү кийиребиз.

Системанын каалагандай s_{k-1} абалында X_k башкаруусун анын кийинки s_k абалына жана s_kдан көз каранды болгон кийинки башкаруу процессине таасир тийгизээрин эске алуу менен тандоо керек. Бул оптималдуулук принцибинен келип чыгат.

Бирок акыркы кадамды каалагандай s_{n-1} абалы үчүн бул кадам үчүн гана локалдуу-оптималдуу тандоого болот.

n-кадамды карайбыз: s_{n-1} - n-кадамдын башталышындагы системанын абалы, $s_n = \epsilon$ акыркы абал, X_n - n-кадамдагы башкаруу, ал эми $f_n(s_{n-1}, X_n)$ – n-кадамдын максаттуу функциясы.

Оптималдуулук принцибине ылайык, X_nди каалагандай s_{n-1} абалы үчүн бул кадамда максаттуу функция максимумга ээ боло тургандай тандоо керек.

S системасы акыркы кадамдын башталышында каалагандай s_{n-1} абалында болуп, башкаруунун акыркы кадамында оптималдуу болгон учурда максаттуу функциянын же n-кадамдын эффективдүүлүк көрсөткүчүнүн максималдык маанисин $Z_n^*(s_{n-1})$ аркылуу белгилейбиз.

$Z_n^*(s_{n-1})$ - n- *кадамдагы максаттуу функциянын шарттуу максимуму деп аталат:*

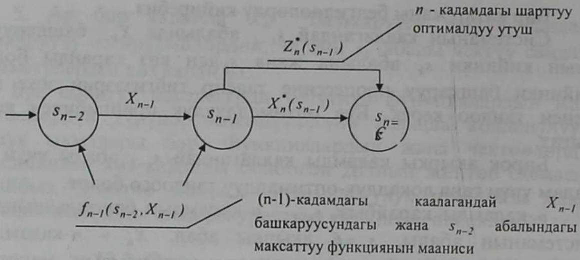
$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n). \qquad (13.5)$$

Максималдаштыруу бардык мүмкүн болгон X_n башкаруулары боюнча жүргүзүлөт.

$Z_n^*(s_{n-1})$ максималдык маанисине туура келүүчү X_n башкаруусу да s_{n-1} ден көз каранды болот жана n-кадамдагы *шарттуу оптималдуу башкаруу* деп аталат. Ал $X_n^*(s_{n-1})$ аркылуу белгиленет.

Локалдык оптималдаштыруунун бир ченемдүү маселесин (13.5)-теңдеме боюнча чыгарып, бардык мүмкүн болгон s_{n-1} абалдары үчүн $Z_n^*(s_{n-1})$ жана $X_n^*(s_{n-1})$ функцияларын табабыз.

Эми эки кадамдуу маселени карайбыз: n- кадамга $n-1$ кадамды бириктиребиз (2-чийме).



2 - чийме

Каалагандай s_{n-2} абалы, каалагандай X_{n-1} башкаруулары жана n- кадамдагы оптималдуу башкаруу үчүн акыркы эки кадамдагы максаттуу функциянын мааниси төмөнкүгө барабар:

$$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}). \tag{13.6}$$

Оптималдуулук принцибине ылайык, каалагандай s_{n-2} абалы үчүн чечимди n- кадамдагы оптималдуу башкаруу менен бирдикте, акыркы эки кадамда максаттуу функция максималдык мааниге ээ боло тургандай тандоо керек. Демек, (13.6)-туюнтманын бардык мүмкүн болгон X_{n-1} башкаруулары боюнча максимумун табуу керек. Бул сумманын максимуму s_{n-2}ден көз каранды, ал $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ аркылуу белгиленет жана акыркы эки кадамдагы *оптималдуу башкаруудагы максаттуу функциянын шарттуу максимуму* деп аталат. Буга тиешелүү $(n-1)$ – кадамдагы X_{n-1} башкаруусун $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ аркылуу белгилейбиз жана ал $(n-1)$ – кадамдагы *шарттуу оптималдуу башкаруу* деп аталат.

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}) \right\}. \tag{13.7}$$

(13.7)-деги фигуралуу кашаанын ичиндеги туюнтма s_{n-2} жана X_{n-1} көз каранды, анткени s_{n-1} ди $k = n-1$ болгондо, (13.2) – абалдардын теңдемелеринен табууга болот:

$$s_{n-1} = \varphi_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1})$$

жана аны $Z_n^*(s_{n-1})$ функциясындагы s_{n-1} дин ордуна коёбуз.

(13.7) – теңдемесин X_{n-1} өзгөрүлмөсү боюнча максималдаштыруунун натыйжасында эки функция алынат:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) \text{ жана } X_{n-1}^*(s_{n-2}).$$

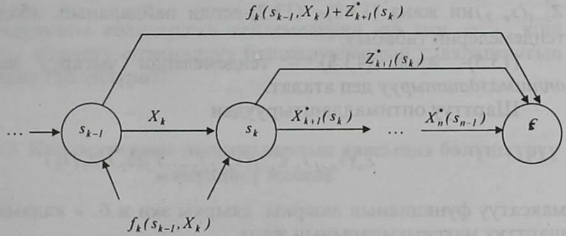
Мындан кийин үч кадамдуу маселе каралат: акыркы эки кадамга $(n-2)$- кадам бириктирилет ж.б.

$Z_k^*(s_{k-1})$ аркылуу k-кадамдын башталышында система s_{k-1} абалында болгон учурда, k-кадамдан баштап акырына чейинки $(n-k+1)$ кадамдардагы оптималдуу башкарууда алынган максаттуу функциянын шарттуу максимумун белгилейбиз. Бул функция төмөнкүгө барабар

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{(x_k,\dots,x_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(s_{i-1}, X_i).$$

Анда

$$Z_{k+1}^*(s_k) = \max_{\{(x_{k+1},\dots,x_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(s_{i-1}, X_i).$$



3 - чийме

k-кадамдагы каалагандай X_k башкаруусундагы жана кийинки $n-k$ кадамдардагы оптималдуу башкаруудагы акыркы $n-k$ кадамдардагы максаттуу функция төмөнкүгө барабар

$$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k).$$

Оптималдуулук принцибине ылайык, X_k ушул сумма максималдуу боло тургандай тандалып алынат, б.а.

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\left\{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\right\}, \tag{13.8}$$

$$k = n-1, n-2, ..., 2, 1.$$

k-кадамдагы (13.8)-функция максималдык мааниге ээ болгон X_k башкаруусу k-кадамдагы *шарттуу оптималдуу башкаруу* деп аталат жана $X_k^*(s_{k-1})$ аркылуу белгиленет ((13.8)-деги s_kнын ордуна абалдардын теңдемелеринен аныкталган $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k)$ туюнтмасын коюу керек).

(13.8) – теңдемелери *Беллмандын теңдемелери* деп аталышат. Бул рекурренттик катыштар функциянын кийинки маанилерин пайдаланып мурунку маанилерин табууга мүмкүндүк берет. Эгерде (13.5)-ден $Z_n^*(s_{n-1})$ тапсак, анда $k = n-1$ болгондо бардык мүмкүн болгон s_{n-2}нин маанилери үчүн максималдаштыруу маселесин чыгарып, (13.8)-ден $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ жана $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ лерди аныктоого болот. Андан кийин $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ни жана (13.8)-, (13.2)-лерди пайдаланып, абалдардын теңдемелерин табабыз.

(13.5)- жана (13.8) – теңдемелерди чыгаруу *шарттуу оптималдаштыруу* деп аталат.

Шарттуу оптималдаштыруудан

$$Z_n^*(s_{n-1}),\ Z_{n-1}^*(s_{n-2}), \ldots, Z_2^*(s_1), Z_1^*(s_0)$$

максатуу функциянын акыркы, акыркы эки ж.б. n кадамдардагы шарттуу максимумдарынын жана

$$X_n^*(s_{n-1}), X_{n-1}^*(s_{n-2}), \ldots,\ X_2^*(s_1),\ X_1^*(s_0)$$

n-, $(n$-1)-,…,1-кадамдардагы шарттуу оптималдуу башкаруулардын удаалаштыктарын алабыз.

Бул удаалаштыктарды пайдаланып, nдин жана s_0дүн берилген маанилеринде ДП маселесинин чечимин табууга болот. Шарт боюнча $Z_1^*(s_0)$ – система 1 – кадамдын башталышында s_0

абалында болгон учурда максаттуу функциянын n кадамдардагы шарттуу максимуму, б.а.

$$Z_{max} = Z_1^*(s_0). \tag{13.9}$$

Мындан кийин шарттуу оптималдуу башкаруулардын удаалаштыгын жана абалдардын (13.2)- теңдемелерин пайдалануу керек.

Фиксирленген s_0 дө $X_1^* = X_1^*(s_0)$. (13.2)-ден $s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*)$ ны таап, бул маанилерди шарттуу оптималдуу башкаруулардын удаалаштыгына коёбуз:

$X_2^* = X_2^*(s_1^*)$ ж.б. төмөнкү чынжырча боюнча

$$X_1^* = X_1^*(s_0) \to s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*) \Rightarrow X_2^* = X_2^*(s_1^*) \to s_2^* = \varphi_2(s_1^*, X_2^*) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_3^* = X_3^*(s_2^*) \to \ldots \to s_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*).$$

Жыйынтыгында ДП маселесинин оптималдуу чечимин алабыз:

$$X^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*).$$

($\to$ - стрелкасы абалдардын теңдемелерин, ал эми $\Rightarrow$ - кош стрелкасы шарттуу оптималдуу башкаруулардын удаалаштыгын колдонууну түшүндүрөт).

13.3. Каражаттарды ишканалардын арасында бөлүштүрүү жөнүндөгү маселе

Каражаттарды ишканалардын арасында бөлүштүрүү жөнүндөгү маселени чечүүнүн методун конкреттүү маселеде келтиребиз.

Маселе. Кезектеги жылга төрт өндүрүштүк ишкананын ишмердүүлүгү пландаштырылат. Баштапкы каражат: $s_0 = 5$ а.б. Ар бир ишканага чегерүүлөрдүн өлчөмдөрү 1 а.б. га эселүү. k, $k = 1,2,3,4$ - ишканага бөлүнгөн x каражаты жылдын аягында

$f_k(x)$ га барабар пайда берет. $f_k(x)$ функциялары таблица түрүндө берилген (1-табл.). Төмөнкүлөрдү эске алуу керек:

а) $f_k(x)$ пайдасы башка ишканаларга чегерүүлөрдүн өлчөмдөрүнөн көз каранды эмес;

б) бардык ишкананын пайдалары бирдей акча бирдикте туюнтулат;

в) суммардык пайда бардык ишканалардын пайдаларынын суммасына барабар.

Суммардык пайда максималдуу боло тургандай каражаттарды ишканаларга бөлүштүрүүнү аныктоо талап кылынат.

1 - таблица

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	9	4	7	6
2	13	7	9	7
3	14	8	13	10
4	17	12	15	13
5	22	15	18	17

◊ $x_k, k=1,2,3,4$ аркылуу k - ишканага бөлүнгөн каражаттын санын белгилейбиз.

Суммардык пайда

$$Z=\sum_{k=1}^{4} f_k(x_k). \tag{13.10}$$

x өзгөрүлмөлөрү

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 5, \qquad x_k \ge 0, k=1,2,3,4 \tag{13.11}$$

чектөөлөрүн канааттандырат.

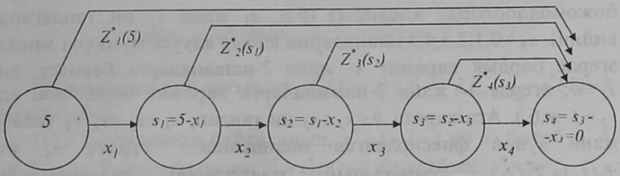
(13.10) – функциясы максималдык мааниге ээ боло тургандай (13.11) – чектөөлөр системасынын терс эмес x_1, x_2, x_3, x_4 чечимдерин табуу талап кылынат. (13.10)–(13.11)-маселесинин чектөөлөрү сызыктуу, өзгөрүлмөлөрү бүтүн, ал эми $f_k(x)$ функциялары таблицалык жол менен берилгендиктен, аны чечүүдө бүтүн сандуу СПнын методдорун колдонууга болбойт.

Маселени ДПнын методу менен чечүүнүн схемасы төмөнкүчө: $s_0 = 5$ каражатын бөлүштүрүүнү 4 кадамдуу процесс катары кароого болот. Кадамдын номери ишкананын номери менен туура келет. x_1, x_2, x_3, x_4 өзгөрүлмөлөрүн тандоо – тиешелүү түрдө I, II, III , IV кадамдарындагы башкаруулар. ε– бөлүштүрүү процессинин акыркы абалы нөлгө барабар, анткени бардык каражат өндүрүшкө чегерилиш керек. Бөлүштүрүүнүн схемасы 4 – чиймеде көрсөтүлгөн.

Бул маселеде абалдардын теңдемелери

$$s_k = s_{k-1} - x_k,\ k = 1,2,3,4, \tag{13.12}$$

көрүнүшүндө болот, мында s_k - абалдын параметри - k-кадамдан кийинки калган каражаттын саны, б.а. калган 4 - k ишканалардын арасында бөлүштүрүлүүгө тийиш болгон каражат.



4-чийме

$k, (k+1), \ldots, 4$ - ишканалардын арасында $s_{k-1} (0 \le s_{k-1} \le 5)$ каражатты оптималдуу бөлүштүргөн учурдагы алардын шарттуу оптималдуу пайдасы болгон $Z^*_k(s_{k-1})$ функциясын кийиребиз. k-кадамдагы мүмкүн болгон башкаруу $0 \le x_k \le s_{k-1}$ шартын канааттандырат. (k - ишканага каражат бөлүштүрүлбөйт, анда $x_k = 0$ же k - ишканага калган каражаттан көп бөлүнбөйт, $x_{k-1} \le s_{k-1}$).

Шарттуу максимумдар үчүн теңдемелер төмөнкүчө болот:

$$k = 4, s_4 = 0 \Rightarrow Z^*_4(s_3) = \max_{0 \le x_4 \le s_3} f_4(x_4), \tag{a}$$

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} \{f_3(x_3) + Z_4^*(s_3)\}, \qquad (б)$$

$$Z_2^*(s_1) = \max_{0 \le x_2 \le s_1} \{f_2(x_2) + Z_3^*(s_2)\}, \qquad (в)$$

$$Z_1^*(5) = \max_{0 \le x_1 \le 5} \{f_1(x_1) + Z_2^*(s_1)\}. \qquad (г)$$

Ар бир кадамда (4 – чиймени к.) шарттуу оптималдаштырып, жазылган теңдемелерди удаалаш чыгарабыз.

IV кадам. 1 – таблицада $f_4(x)$ функциясынын мааниси монотондуу өскөндүктөн, IV кадамда калган каражаттын баарын 4-ишканага чегерүү керек. Мында $s_3 = 0,1,...,5$ мүмкүн болгон маанилери үчүн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$Z_4^*(s_3) = f_4(s_3) \quad \text{жана} \quad x_4^*(s_3) = s_3.$$

III кадам. III кадамга калган s_2 каражатына карата божомолдоолорду жасайбыз (б.а. x_1 жана x_2 ни тандагандан кийин). s_2 - 0,1,2,3,4,5 маанилерин кабыл алуусу мүмкүн (мисалы, эгерде бардык каражат 1- жана 2-ишканаларга берилсе, анда $s_2 = 0$; эгерде 1- жана 2-ишканаларга каражат берилбесе, анда $s_2 = 5$ ж.б.). Ага карата $0 \le x_3 \le s_2$ ни тандап, $s_3 = s_2 - x_3$ тү табабыз жана s_2нин фиксирленген маанисинде түрдүү x_3 үчүн $f_3(s_3) + Z_4^*(s_3)$ суммасынын маанилерин салыштырабыз. Каалагандай s_2 үчүн бул маанилердин эң чоңу $Z_3^*(s_2)$ – s_2 каражатынын 3- жана 4-ишканалардын арасында оптималдуу бөлүштүрүлгөндөгү шарттуу оптималдуу пайда болот. Оптималдаштыруу 2-таблицада $k = 3$ болгондо келтирилген. Ар бир s_2 үчүн $Z_3^*(s_2)$ жана $X_3^*(s_2)$ маанилери тиешелүү түрдө 5- жана 6-мамычаларда берилген.

II кадам. (в) теңдемесине ылайык, шарттуу оптималдаштыруу $k = 2$ болгондо 2-таблицада жүргүзүлгөн. s_1 дин бардык мүмкүн болгон маанилери үчүн $Z_2^*(s_1)$ жана $X_2^*(s_1)$ маанилери тиешелүү түрдө 8- жана 9-мамычаларда жазылган. 7 – мамычадагы 1-кошулуучулар - $f_2(x_2)$ маанилери 1-таблицадан, 2-кошулуучулары 2-табл. 5-мамычасынан $s_2 = s_1 - x_2$ болгон учурда алынат.

I кадам. $k=1$ болгондогу $s_0=5$ үчүн шарттуу оптималдаштыруу ((г) теңдемеси) 2-таблицада жүргүзүлгөн. Эгерде $x_1=0$ болсо, анда $s_1=5$. $s_1=5$ бирдик каражат калган үч ишкананын арасында оптималдуу бөлүштүрүлгөндөгү төрт ишканадан алынган пайда $f_1(0)+Z_2^*(5)=0+23=23$ кө барабар ($Z_2^*(5)$ 2-табл. 9-мамычасынан $s_1=5$ болгондо алынат). Эгерде $x_1=1$ болсо, анда $s_2=4$. $s_2=4$ бирдик каражат калган үч ишкананын арасында оптималдуу бөлүштүрүлгөн учурдагы суммардык пайда $f_1(1)+Z_2^*(4)=9+20=29$ га барабар ($f_1(1)$ - 1-таблицадан, ал эми $Z_2^*(4)$– 2-табл. 9-мамычасынан алынат). Ушул сыяктуу $x_1=2$ үчүн, $s_2=3$ жана $f_1(2)+Z_2^*(3)=13+17=30$;

$x_1=3$ үчүн, $s_2=2$ жана $f_1(3)+Z_2^*(2)=14+13=27$;

$x_1=4$ үчүн, $s_2=1$ жана $f_1(4)+Z_2^*(1)=17+7=24$;

$x_1=5$ үчүн, $s_2=0$ жана $f_1(5)+Z_2^*(0)=22+0=22$.

Пайдаларды салыштырып, $Z_1^*(5)=30$ а.б. $= Z_{max}$, $x_1^*=x_1^*(5)=2$ ге ээ болобуз.

(13.12)-теңдемени пайдаланып, $s_1^*=5-2=3$ кө ээ болобуз. Ал эми 2-табл. 9-мамычасынан $x_2^*=x_2^*(3)=1$ ди алабыз. $s_2^*=3-1=2$, ал эми 2-табл. 6-мамычасынан – $x_3^*=x_3^*(2)=1$. Акырында $s_3^*=2-1=1$ жана $x_4^*(1)=1$, б.а. $X^*(2;1;1;1)$.

Суммардык пайданын максимуму 30 а.б. га барабар. Мында 1-ишканага 2 а.б.; 2-ишканага – 1 а.б.; 3-ишканага – 1 а. б. ; 4 – ишканага –1 а. б. каражат бөлүнөт. ◊

1-эскертүү. Шарттуу экстремумдун 4 ченемдүү каралган маселесин чечүү төрт бир ченемдүү маселелерди чечүүгө алып келинди. Ар бир кадамда бир x өзгөрүлмөсү аныкталды.

2-эскертүү. Каралган маселеден ДП методу функциянын түрүнөн жана берилиш жолунан көз каранды эмес экендиги көрүнүп турат. $f_k(x)$ функциялары таблицалык түрдө берилгендиктен, $Z_k^*(s)$ жана $X_k^*(s)$ функциялары дискреттүү маанилерди алышты (2-табл.).

2 -таблица

s_{k-1}	x_k	s_k	$k=3$			$k=2$			$k=1$		
			$f_3(x_3)+$ $+Z_4^*(s_3)$	Z_3^* (s_2)	x_3^* (s_2)	$f_2(x_2)+$ $+Z_3^*(s_2)$	Z_2^* (s_1)	x_2^* (s_1)	$f_1(x_1)+$ $+Z_2^*(s_1)$	Z_1^* (s_0)	x_1^* (s_0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+6=6	7	1	0+7=7	7	0	0+7=7	9	1
	1	0	7+0=7			4+0=4			9+0=9		
2	0	2	0+7=7	13	1	0+13=13	13	0	0+13=13	16	1
	1	1	7+6=13			4+7=11			9+7=16		
	2	0	9+0=9			7+0=7			13+0=13		
3	0	3	0+10=10	15	2	0+15=15	17	1	0+17=17	22	1
	1	2	7+7=14			4+13=17			9+13=22		
	2	1	9+6=15			7+7=14			13+7=20		
	3	0	13+0=13			8+0=8			14+0=14		
4	0	4	0+13=13	19	3	0+19=19	20	2	0+20=20	26	1
	1	3	7+10=17			4+15=19			9+17=26		2
	2	2	9+7=16			7+13=20			13+13=26		
	3	1	13+6=19			8+7=15			14+7=21		
	4	0	15+0=15			12+0=12			17+0=17		
5	0	5	0+17=17	21	4	0+21=21	23	1	0+23=23	30	2
	1	4	7+13=20			4+19=23			9+20=29		
	2	3	9+10=19			7+15=22			13+17=30		
	3	2	13+7=20			8+13=21			14+13=27		
	4	1	15+6=21			12+7=19			17+7=24		
	5	0	18+0=18			15+0=15			22+0=22		

3-эскертүү. Методдун артыкчылыгы болуп, чечимдин s_0 жана n дин өзгөрүшүнө сезгичтигин анализдөө мүмкүндүгү саналат. Жүргүзүлгөн эсептөөлөрдү s_0 жана кадамдардын саны nдин башка маанилери үчүн да колдонууга болот. Мисалы, каралган маселеде баштапкы каражат 1 а.б.га азайсын. Анда $s_0=4$ үчүн таблицадан $k=1$ болгондогу эсептөөлөрдү кароо жетиштүү (бул 2-таблицада эле жүргүзүлгөн). Бул учурда Z_{max}=26 а.б. жана каражат төмөнкүчө бөлүнөт:

$$x_1^*=1 \text{ же } x_1^*=2 \rightarrow s_1^*=4-1=3 \text{ же } \rightarrow s_1^*=4-2=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_2^*=1 \text{ же } x_2^*=0 \rightarrow s_2^*=3-1=2 \text{ же } s_2^*=2-0=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3^*=1 \rightarrow s_3^*=2-1=1 \Rightarrow x_4^*=1.$$

Эсептөөнүн жыйынтыгында $X^{(1)*}(1;1;1;1)$ жана $X^{(2)*}(2;0;1;1)$. оптималдуу чечимдери табылды. Эгерде баштапкы каражаттар чоңойсо, мисалы 1 а.б.га, $s_0 = 6$ болсо, ал эми $f_k(x)$ пайда функциялары өзгөрүүсүз калса, анда 2-таблицага $k = 3,2,1$ болгондо $s_0 = 6$ үчүн бөлүк кошуу жетиштүү. Бул эсептөөлөр 3-таблицада келтирилген.

3-таблица

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	6	0+17=17			0+24=24			0+26=26		
	1	5	7+17=24			4+21=25			9+23=32		
6	2	4	9+13=22	24	1	7+19=26	26	2	13+20=33	33	2
	3	3	13+10=23		5	8+15=23			14+17=31		
	4	2	15+7=22			12+13=25			17+13=30		
	5	1	18+6=24			15+7=22			22+7=29		

$$Z_{max} = 33,\ x_1^* = 2 \to s_1^* = 6 - 2 = 4 \Rightarrow x_2^* = 2 \to s_2^* = 4 - 2 = 2 \Rightarrow x_3^* = 1 \to$$

$\to s_3^* = 2 - 1 = 1 \Rightarrow x_4^* = 1$ ге ээ болобуз. Оптималдуу чечим $X^*(2;2;1;1)$.

Эгерде $s_0 = 5$ каражатын 2-,3- жана 4-ишканалардын арасында бөлүштүрүү керек болсо, анда ал маселе 2-таблицада эле чечилген. $k = 2$ бөлүгүнөн $Z_{max} = Z_2^*(5) = 23$, $x_2^* = 1, x_3^* = 3, x_4^* = 1$ алынат.

Эми ишканалардын саны (кадамдардын саны) көбөйсүн. Анда схеманы $k = 0,-1,...$ номерлүү кадамдарды кошуу менен толуктоо керек. Мисалы, $s_0 = 6$ каражаты беш ишкананын арасында бөлүштүрүлсүн. Эгерде $x \neq 0$ болсо, функция $f(x) = 2x + 3$ көрнүшүндө жана $f(0) = 0$ болсун. 5-ишканага $k = 0$ номерин беребиз, анда x_0 – бул ишканага бөлүнгөн каражат болот. $Z_0^*(6)$ аркылуу беш ишканадан алынган оптималдуу пайданы белгилейли:

$$Z_0^*(6) = \max_{0 \le x_0 \le 6} \{f_0(x_0) + Z_1^*(s_1)\},$$

ал эми $s_1 = 6 - x_0$. 0-кадамдагы шарттуу оптималдаштыруу 4-табл. келтирилген.

4- таблица

x_0	0	1	2	3	4	5	6
$s_1 = 6 - x_0$	6	5	4	3	2	1	0
$f_0(x_0)$	0	5	7	9	11	13	15
$Z_1^*(s_1)$ ($k = 1$ болгондо 2- жана 3-табл. алынды)	33	30	26	22	16	9	0
$f_0(x_0) + Z_1^*(s_1)$	33	35	33	31	27	22	15

Демек, $Z_{max} = 35$, оптималдуу чечим $X^*(1;2;1;1;1)$.

4-эскертүү. Методдун кемчилдиги болуп ченемдүүлүктүн чоңоюушу менен эсептөөлөрдөгү техникалык кыйынчылыктардын пайда болушу эсептелет. Эгерде ар бир X_k^* башкаруусу r сандагы өзгөрүлмөдөн, ал эми s_k^* абалы p параметрден көз каранды болсо, анда ар бир кадамда оптималдаштыруунун rp ченемдүү маселеси келип чыгат. Каралган мисалда $r=1, p=1$, б.а. бир ченемдүү мисал чыгарылды. ДП методун компьютердин жардамында реализациялоодо да r, p, n дин чоң эмес маанилериндеги маселелер чыгарылат.

13.4. ДП методун колдонуунун жалпы схемасы. Ресурстарды тармактардын арасында n жылга оптималдуу бөлүштүрүү маселеси

Маселени ДП методу менен чыгарууга коюлуучу бардык талаптар аткарылсын. ДП моделин түзүү жана ДП методун колдонуу төмөнкүдөй этаптардан турат:

1. Башкаруу процессин кадамдарга бөлүүнүн ыкмасы тандалат.

2. Ар бир кадамдагы s_k абалынын параметрлери жана X_k башкаруунун өзгөрүлмөлөрү аныкталат.

3. Абалдар теңдемеси жазылат.

4. k-кадамдын максаттуу функциясы жана суммардык максаттуу функция кийрилет.

5. $Z_k^*(s_{k-1})$ шарттуу максимумдары (минимумдары) жана k-кадамдагы шарттуу оптималдуу $X_k^*(s_{k-1})$, $k=n, n-1, ..., 2, 1$ башкаруулары кийирилет.

6. ДПнын эсептөө схемасы үчүн Беллмандын теңдемелери $Z_n^*(s_{n-1})$ жана $Z_k^*(s_{k-1})$, $k=n-1, ..., 1$ Лер үчүн жазылат.

7. Беллмандын теңдемелерин удаалаш чыгаруу (шарттуу оптималдаштыруу) менен функциялардын:

$$\{ Z_k^*(s_{k-1}) \} \text{ жана } \{ X_k^*(s_{k-1}) \}$$

удаалаштыктары алынат.

8. Шарттуу оптималдаштыруу жүргүзүлгөндөн кийин конкреттүү s_0 баштапкы каражаты үчүн

а) $Z_{max} = Z_1^*(s_0)$ жана

б) $s_0 \Rightarrow X_1^* \to s_1^* \Rightarrow X_2^* \to s_2^* \Rightarrow ... \Rightarrow X_{n-1}^* \to s_{n-1}^* \Rightarrow X_n^* \to s_n^*$ чынжыры боюнча $X^*(X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$ оптималдуу башкаруусу аныкталат.

Маселе. Эки өндүрүш тармагынын ишмердүүлүгү n жылга пландаштырылат. Баштапкы ресурс s_0. Жылдын башында I тармакка бөлүнгөн x өлчөмүндөгү каражат, жылдын аягында $f_1(x)$ пайда келтирет жана $q_1(x) < x$ өлчөмүндө кайтарылат; ал эми II тармак үчүн пайда функциясы $f_2(x)$, ал эми кайтарымы $q_2(x)$ $(q_2(x) < x)$. Жылдын аягында кайтарылган каражаттар I жана II тармактардын арасында кайрадан бөлүштүрүлөт, жаңы каражаттар келбейт, пайда өндүрүшкө иштетилбейт.

Эки тармактын n жыл ичиндеги суммардык пайдасы максималдуу боло тургандай s_0 каражатын тармактардын арасында n жылга бөлүштүрүү талап кылынат.

а) маселе үчүн ДП моделин жана эсептөө схемасын түзүү;

б) s_0=5000 б., $n = 4$, $f_1(x) = 0{,}5x$, $q_1(x) = 0{,}5x$, $f_2(x) = 0{,}4x$, $q_2(x) = 0{,}8x$ болгон учурда маселени чечүү керек.

◊ а) Эки тармактын арасында каражатты бөлүштүрүү процесси убакыт ичинде созулат, чечим ар жылдын башында алынат. Демек, кадамдарга бөлүү жылдар боюнча: кадамдын номери – жылдын номери болот. Башкарылуучу система – өндүрүштүн эки тармагы, ал эми башкаруу кезектеги жылдын башында ар бир тармакка каражатты бөлүштүрүү. k-жылдын башындагы абалдын параметрлери – s_{k-1}, $k = 1, 2, ..., n$ – бөлүштүрүлүүгө тийиш болгон каражаттын саны. Ар бир кадамдагы башкаруунун өзгөрүлмөлөрү:
x_k – I тармакка жана y_k – II тармакка бөлүнгөн каражаттардын саны. s_{k-1} каражаты толук бөлүштүрүүлүгө тийиш болгондуктан, $y_k = s_{k-1} - x_k$ жана k-кадамдагы бөлүштүрүү бир гана x_k өзгөрүлмөсүнөн көз каранды, б.а. $X_k(x_k, s_{k-1} - x_k)$.

$$s_k = q_1(x_k) + q_2(s_{k-1} - x_k) \tag{13.13}$$

абалдардын теңдемелери k-жылдын акырында кайтарылган суммардык каражаттарды түшүндүрөт.

k-кадамдын эффективдүүлүк көрсөткүчү - k-жылдын акырындагы эки тармактын пайдасы:

$$f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k). \tag{13.14}$$

Эффективдүүлүктүн суммардык көрсөткүчү же маселенин максаттуу функциясы n жылдагы пайда:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k). \qquad (13.15)$$

$Z_k^{*}(s_{k-1})$ – k - жылдын башындагы s_{k-1} каражаты андан ары оптималдуу бөлүштүрүлгөн учурдагы k-жылдан n - жылга чейинки $n-k+1$ жылдагы оптималдуу пайда. n жылдагы оптималдуу пайда $Z_{max} = Z_1^{*}(s_0)$.

Беллмандын теңдемелери төмөнкүчө болот:

$$Z_n^{*}(s_{n-1}) = \max_{0 \le x_n \le s_{n-1}} \{f_1(x_n) + f_2(s_{n-1} - x_n)\}, \qquad (13.16)$$

$$Z_k^{*}(s_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le s_{k-1}} \{f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k) + Z_{k+1}^{*}(s_k)\}, \qquad (13.17)$$

$$k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$$

б) Берилгендерди пайдаланалы.

(13.13) – абалдардын теңдемелери

$$s_k = 0{,}5x_k + 0{,}8(s_{k-1} - x_k) \text{ же } s_k = 0{,}8s_{k-1} - 0{,}3x_k \qquad (13.18)$$

көрүнүшүндө болот.

k - кадамдын максаттуу функциясы (13.14)-боюнча

$$0{,}5x_k + 0{,}4(s_{k-1} - x_k) = 0{,}1x_k + 0{,}4s_{k-1}.$$

Маселенин максаттуу функциясы

$$Z = \sum_{k=1}^{4} 0{,}4s_{k-1} + 0{,}1x_k. \qquad (13.19)$$

Беллмандын теңдемелери

$$Z_4^{*}(s_3) = \max_{0 \le x_4 \le s_3} \{0{,}4s_3 + 0{,}1x_4\}, \qquad (13.20)$$

жана $$Z_k^{*}(s_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le s_{k-1}} \{0{,}1x_k + 0{,}4s_{k-1} + Z_{k+1}^{*}(s_k)\}. \qquad (13.21)$$

Шарттуу оптималдаштырууну жүргүзөбүз.

IV кадам. (13.20) – теңдемени пайдаланабыз. Кашаанын ичиндеги функцияны Z_4 аркылуу белгилейбиз, $Z_4 = 0,1x_4 + 0,4s_3$. Z_4 - сызыктуу, өсүүчү функция, анткени бурчтук коэффициенти 0,1 нөлдөн чоң. Ошондуктан максимумга $[0;s_3]$ интервалынын оң учунда ээ болот (5, а - чийме). Демек, $Z_4^*(s_3) = 0,5s_3$, $x_4^*(s_3) = s_3$.

III кадам. (13.21)-теңдеме $k=3$ учурда төмөнкүчө болот

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} \{0,1x_3 + 0,4s_2 + 0,5s_3\}.$$

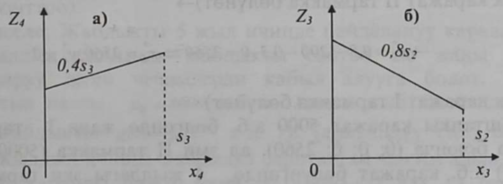
(13.18)-ден s_3 тү аныктайбыз: $s_3 = 0,8s_2 - 0,3x_3$ жана аны акыркы теңдемеге коюп,

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} \{0,1x_3 + 0,4s_2 + 0,5(0,8s_2 - 0,3x_3)\},$$

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} \{0,8s_2 - 0,05x_3\}$$

кө ээ болобуз. x_3 кө карата сызыктуу $Z_3 = 0,8s_2 - 0,05x_3$ функциясы $[0;s_2]$ кесиндисинде кемүүчү. Ошондуктан функция максимумга $x_3 = 0$ чекитинде ээ болот (5,б -чийме):

$$Z_3^*(s_2) = 0,8s_2,\ x_3^*(s_2) = 0.$$



5 - чийме

II кадам. Абалдын теңдемеси: $s_2 = 0,8s_1 - 0,3x_2$. $k=2$ болгондо (13.21)-теңдеме төмөнкү көрүнүштө болот:

$$Z_2^*(s_1) = \max_{0 \le x_2 \le s_1} \{1,04s_1 - 0,14x_2\}.$$

Жогорудагыдай эле максимумга $x_2 = 0$ чекитинде ээ болот, б.а.

$$Z_2^*(s_1) = 1{,}04 s_1, \; x_2^*(s_1) = 0.$$

I кадам. $s_1 = 0{,}8 s_0 - 0{,}3 x_1$. $k = 1$ болгондо (13.21)-теңдеме

$$Z_1^*(s_0) = \max_{0 \le x_1 \le s_0} \{1{,}232 s_0 - 0{,}212 x_1\}$$

көрүнүшүндө болот. Мында да функция максимумга кесиндинин сол учунда ээ болот, б.а. $Z_1^*(s_0) = 1{,}232 s_0, \; x_1^*(s_0) = 0$.

Ушуну менен шарттуу оптималдаштыруу бүтөт. Анын жыйынтыгын жана баштапкы маалыматтарды пайдаланып, $Z_{max} = Z_1^*(5000)$, $Z_{max} = 6160$ экендигин алабыз.

$$x_1^* = 0, y_1^* = s_0 = 5000$$

(бардык каражат II тармакка бөлүнөт)→

$$\to s_1^* = 0{,}8 \cdot 5000 - 0{,}3 \cdot 0 = 4000 \Rightarrow x_2^* = 0, y_2^* = s_1 = 4000 \to$$

(бардык каражат II тармакка бөлүнөт)→

$$\to s_2^* = 0{,}8 \cdot 4000 - 0{,}3 \cdot 0 = 3200 \Rightarrow x_3^* = 0, y_3^* = s_2 = 3200 \to$$

(бардык каражат II тармакка бөлүнөт)→

$$\to s_3^* = 0{,}8 \cdot 3200 - 0{,}3 \cdot 0 = 2560 \Rightarrow x_4^* = 2560, y_4^* = 0$$

(бардык каражат I тармакка бөлүнөт).

Баштапкы каражат 5000 а.б. болгондо жана I тармакка жылдар боюнча (0; 0; 0; 2560), ал эми II тармакка (5000; 4000; 3200; 0) а.б. каражат бөлүнгөндө, 4 жылдагы эки тармактын оптималдуу пайдасы 6160 а.б. ны түзөт. ◊

13.5. Жабдыктарды алмаштыруу жөнүндөгү маселе

Жабдыктарды алмаштыруу маанилүү экономикалык проблемалардан болуп саналат. Маселе эски жабдыктарды (станокторду, өндүрүш имараттарын ж.б.) алмаштыруунун оптималдуу мөөнөттөрүн аныктоодо турат. *Жабдыктардын эскирүүсү* деп, физикалык жана моралдык колдонуудан чыккандыгын түшүнөбүз. Натыйжада өндүрүштүк чыгымдар, ремонтко жана тейлөөгө кеткен чыгымдар өсөт, эмгек өндүрүмдүүлүгү жана ликвиддүү баа төмөндөйт. Оптималдуулук критерийи катары жабдыкты иштетүүдөн түшкөн пайда (максималдаштыруу маселеси) же пландаштырылган мезгилдин ичинде иштетүүгө кеткен суммардык чыгымдар (минималдаштыруу маселеси) каралат.

Маселенин моделин түзүүдө жабдыктарды алмаштыруу боюнча чечим иштетүүнүн ар бир убакыт аралыгынын башталышында (мис., жылдын башында) кабыл алынат жана жабдыктарды чексиз колдонууга болот деп божомолдойбуз.

Жабдыктын негизги мүнөздөөчүсү (абалдын параметри) анын жашы t.

Алмаштыруунун динамикалык моделин түзүүдө алмаштыруу процесси иштетүүнүн жалпы мөөнөтүн n кадамга бөлүү менен n кадамдуу процесс катары каралат. Ар бир кадамдагы мүмкүн болгон башкаруу сапаттык белгилер менен мүнөздөлөт, мисалы, X^c (жабдыкты сактоо), X^a (алмаштыруу), X^p (ремонттоо).

Маселе. Жабдыкты 5 жыл ичинде пайдалануу каралат. Ар бир жылдын башында жабдыкты сактоо же жаңы менен алмаштыруу деген чечимдерди кабыл алууга болот. Жаңы жабдыктын баасы $p_0 = 4000$ а.б. t, $1 \le t \le 5$ жыл иштетилгенден кийин жабдыкты $g(t) = p_0 2^{-t}$ а.б. га (ликвиддүү баа) сатууга болот. Жылдын ичинде жабдыкка сарпталган чыгым анын жашы tдан көз каранды болот жана $r(t) = 600(t+1)$ а.б. га барабар. Баштапкы сатып алуу жана акыркы сатылуу баасын эсепке алуу менен жабдыкка сарпталган суммардык чыгым минималдуу боло тургандай, жабдыкты иштетүүнүн оптималдуу стратегиясын аныктоо талап кылынат.

ал эми акыркы эки кадамдагы суммардык чыгымдар 1200+1300=2500 дү түзөт. X^a башкаруусунда эки кадамдагы чыгымдар 2600+200=2800 гө барабар. Минималдуу 2500 чыгымын тандайбыз, аны (3; 1) тегерекчесине жазабыз, ал эми бул кадамдагы (3; 1) абалынан (4; 2) абалына өткөрүүчү оптималдуу башкарууну кош сызык менен белгилейбиз. Ар бир (3; t) абалы үчүн ушундай аракеттерди жасайбыз (7 – чиймени к.)

III, II, жана I кадамдардагы шарттуу оптималдаштырууну улантып, 7 – чиймеде төмөнкү жагдайга ээ болобуз: ар бир чекиттен (абалдан) эгерде система бул чекитте болсо, учурдагы кадамдан кайда барууну көрсөтүүчү стрелка чыгат. Ал эми тегерекчелерде бул чекиттен акыркы абалга өтүүнүн минималдык чыгымдары жазылган. Ар бир кадамда (13.22) – теңдемелер графиктик түрдө чыгарылды. Шарттуу оптималдаштыруу жүргүзүлгөндөн кийин (0; 0) чекитинде акырында сатылуусун эске алганда машинаны 5 жыл ичинде пайдаланууга кеткен минималдык чыгымдар: $Z_{min} = 11900$ жазылган. $s_0(0;0)$ чекитинен $\mathcal{E}$ чекитине кош сызыктар боюнча жылуу менен оптималдуу траекторияны аныктайбыз.

Чекиттердин

$$\{(0;\,0),\,(1;\,1),\,(2;\,2),\,(3;\,1),\,(4;\,2),\,(5;\,3)\}$$

жыйындысын алабыз жана ал $X^{\bullet}(X^c,\,X^c,\,X^a,\,X^c,\,X^c)$ оптималдуу башкаруусуна туура келет. Машинаны пайдалануунун оптималдуу режими машинаны 3- жылдын башында алмаштырууда турат. ◊

Мына ошентип, граф эсептөө схемасынын көрсөтмөлүү болуусуна жана маселени ДПнын методу менен чечүүгө мүмкүндүк берет.

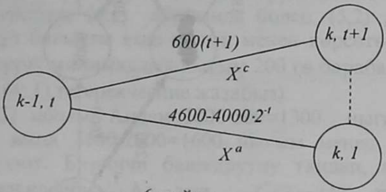
Буга чейин белгилengendей, ДПнын моделдери жана эсептөө схемасы моделге маселенин түрдүү модификацияларын кошууга өтө ийкемдүү. Мисал, ушул сыяктуу маселени башкаруунун көп сандагы «ремонт», «капиталдык ремонт» ж.б. варианттары үчүн кароого болот. Жабдыктарды жаңы менен алмаштырууну техникалык прогрессти эске алуу менен, жабдыктарды ремонттоодон кийинки иштетүүгө кеткен чыгымдардын өзгөрүшүнө карата кароого болот. Бардык бул факторлорду ДПнын эсептөө схемасында эске алууга болот.

$$Z_k^* = min\begin{cases} 600(t+1) + Z_{k+1}^*(t+1), \text{ эгерде } X_k = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} + Z_{k+1}^*(1), \text{ эгерде } X_k = X^a,\ k = 4,3,2,1. \end{cases} \quad (13.25)$$

$Z_k^*(t)$ функцияларынын аныктоосунан $Z_{min} = Z_1^*(0)$ келип чыгат.

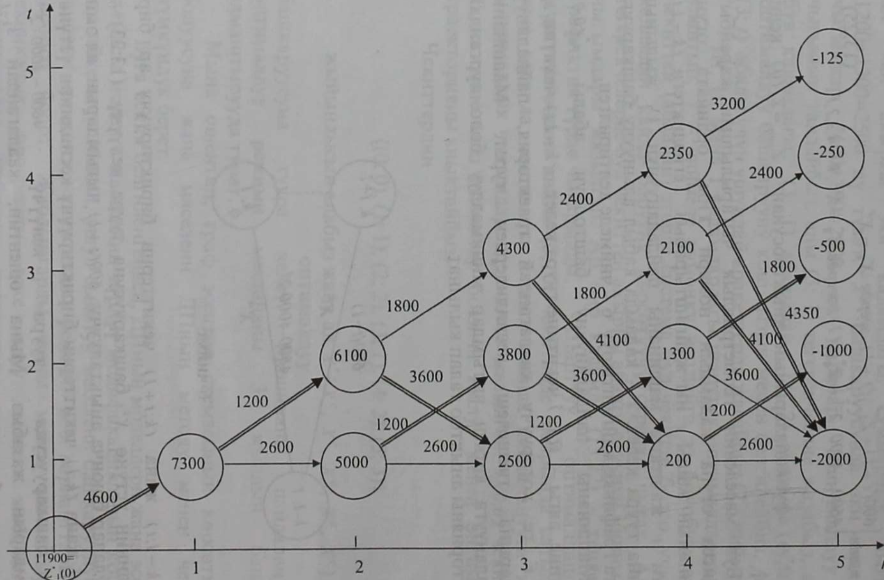
Бул маселенин геометриялык чыгарылышын карайбыз. Абсцисса огуна кадамдын номери kны, ордината огуна машинанын жашы t ны жайгаштырабыз. Тегиздиктеги $(k-1,t)$ чекити t жаштагы машинаны пайдалануунун k- жылынын башына туура келет. k - кадамда кабыл алынуучу башкарууга карата графикке жайгаштыруу 6 – чиймеде келтирилген.

Машинаны пайдаланууну баштоонун абалы $s_0^*(0;0)$ чекитине, аягы – $\epsilon(5;t)$ чекитине туура келет. $s(k-1,t)$ чекитин s_0^* дөн ϵ ге которуучу каалагандай траектория, пайдалануу жылдарына тиешелеш кесиндилерден турат. Машинаны пайдаланууга кеткен чыгымдар минималдуу боло тургандай траекторияны аныктоо талап кылынат.



6-чийме

$(k-1;t)$ жана $(k;t+1)$ чекиттерин бириктирүүчү ар бир кесиндинин үстүнө X^c башкаруусуна туура келүүчү, (13.23) – формулалар боюнча аныкталуучу $600(t+1)$ чыгымдарын, ал эми $(k-1;t)$ жана $(k;1)$ чекиттерин бириктирүүчү кесиндинин үстүнө X^a башкаруусуна туура келүүчү $4600 - 4000 \cdot 2^{-t}$ чыгымдарын жазабыз. Мына ошентип, каалагандай s_{k-1} абалынан s_k абалына өтүүлөргө тиешелеш келүүчү чекиттерди бириктирүүчү бардык кесиндилерди графикке жайгаштырабыз (7 – чийме).


t
5
4
3
2
1
11900=
$Z^*_1(0)$
4600
7300
1200
2600
6100
5000
1800
3600
1200
2600
4300
3800
2500
2400
1800
4100
3600
1200
2600
2350
2100
1300
200
3200
2400
1800
4350
4100
3600
1200
2600
-125
-250
-500
-1000
-2000
1
2
3
4
5
k

7 - чийме

Мисалы, $(k;2)$ жана $(k+1;3)$ чекиттерин бириктирүүчү кесиндинин үстүндө 1800 саны турат, ал $t=2$ жаштагы машинаны 3 жыл пайдаланууга кеткен чыгымдарды берет, ал эми $(k;2)$ жана $(k+1;1)$ бириктирүүчү кесиндинин үстүндө 3600 саны турат – ал t жаштагы машинаны сатуудан түшкөн кирешени эске албаганда, машинаны сатып алууга жана бир жылдын ичинде пайдаланууга кеткен чыгымдарды берет. $0 \le t \le k$ экендигин эске алуу керек.

Абалдардын графында (7-чиймени к.) шарттуу оптималдаштыруу жүргүзөбүз.

V кадам. Баштапкы абалдар – $(4;t)$ чекиттери, акыркылары $(5;t)$. $(5;t)$ абалдарында машина сатылат, сатуудан түшкөн шарттуу оптималдуу киреше $4000 \cdot 2^{-t}$ га барабар, бирок максаттуу функция чыгымдар менен байланышкандыктан, $(5;t)$ тегерекчелерине кирешени минус белгиси менен жазабыз.

Ар бир баштапкы абалдан V кадамдагы акыркы абалдарга кандайча өтүлө тургандыгын анализдейли.

(4; 1) абалы. Мындан машинаны пайдаланууга 1200 жумшап жана сатуудан 1000 киреше алуу менен, б.а. суммардык 200 чыгым жумшап (5;2) абалына өтүүгө жана 2600-2000=600 чыгым менен (5;1) абалына өтүүгө болот. Демек, акыркы кадамда система (4;1) абалында болсо, (5;2) абалына өтүүсү керек (бул багытты кош сызык менен көрсөтөбүз). Бул өтүүгө туура келүүчү минималдык чыгым 200 гө барабар (бул $Z_5^*(1)=200$ чоңдугун (4; 1) тегерекчесине жазабыз).

(4; 2) абалы. Андан 1800-500=1300 чыгым менен (5; 3) чекитине жана 3600-2000=1600 чыгым менен (5; 1) чекитине өтүүгө болот. Биринчи башкарууну тандап, аны кош сызык менен белгилейбиз. Ал эми $Z_5^*(2)=1300$ чыгымын (4; 2) тегерекчесине жазабыз.

Акыркыдан мурунку кадамдын ар бир чекити үчүн ушундай эле ой жүгүртүп, IV кадамдын каалагандай жыйынтыгы үчүн V кадамдын оптималдуу башкаруусун табабыз, аны кош сызык менен белгилейбиз. Андан кийин III кадамдын аягында болуучу системанын ар бир абалын анализдеп, процесстин акырына чейин оптималдуу улантылышын эске алуу менен IV кадамды пландаштырабыз, б.а. $k=4$ болгондо бардык $0 \le t \le 4$ үчүн (13.22) – теңдемелерди чыгарабыз. Мисалы, эгерде IV кадамдын башталышы (3; 1) абалына туура келсе, анда система X^c башкаруусунда (4; 2) чекитине өтөт, бул кадамда чыгымдар 1200, ал эми акыркы эки кадамдагы суммардык чыгымдар 1200+1300=2500 дү түзөт. X^a башкаруусунда эки кадамдагы чыгымдар 2600+200=2800 гө барабар. Минималдуу 2500 чыгымын тандайбыз, аны (3; 1) тегерекчесине жазабыз, ал эми бул кадамдагы (3; 1) абалынан (4; 2) абалына өткөрүүчү оптималдуу башкарууну кош сызык менен белгилейбиз. Ар бир (3; t) абалы үчүн ушундай аракеттерди жасайбыз (7 – чиймени к.)

III, II, жана I кадамдардагы шарттуу оптималдаштырууну улантып, 7 – чиймеде төмөнкү жагдайга ээ болобуз: ар бир чекиттен (абалдан) эгерде система бул чекитте болсо, учурдагы кадамдан кайда барууну көрсөтүүчү стрелка чыгат. Ал эми тегерекчелерде бул чекиттен акыркы абалга өтүүнүн минималдык чыгымдары жазылган. Ар бир кадамда (13.22) – теңдемелер графиктик түрдө чыгарылды. Шарттуу оптималдаштыруу жүргүзүлгөндөн кийин (0; 0) чекитинде акырында сатылуусун эске алганда машинаны 5 жыл ичинде пайдаланууга кеткен минималдык чыгымдар: $Z_{min} = 11900$ жазылган. $s_0(0;0)$ чекитинен ϵ чекитине кош сызыктар боюнча жылуу менен оптималдуу траекторияны аныктайбыз.

Чекиттердин

$$\{(0;\ 0),\ (1;\ 1),\ (2;\ 2),\ (3;\ 1),\ (4;\ 2),\ (5;\ 3)\}$$

жыйындысын алабыз жана ал $X^*\,(X^c,\ X^c,\ X^a,\ X^c,\ X^c)$ оптималдуу башкаруусуна туура келет. Машинаны пайдалануунун оптималдуу режими машинаны 3- жылдын башында алмаштырууда турат. ◊

Мына ошентип, граф эсептөө схемасынын көрсөтмөлүү болуусуна жана маселени ДПнын методу менен чечүүгө мүмкүндүк берет.

Буга чейин белгиленгендей, ДПнын моделдери жана эсептөө схемасы моделге маселенин түрдүү модификацияларын кошууга өтө ийкемдүү. Мисал, ушул сыяктуу маселени башкаруунун көп сандагы «ремонт», «капиталдык ремонт» ж.б. варианттары үчүн кароого болот. Жабдыктарды жаңы менен алмаштырууну техникалык прогрессти эске алуу менен, жабдыктарды ремонттоодон кийинки иштетүүгө кеткен чыгымдардын өзгөрүшүнө карата кароого болот. Бардык бул факторлорду ДПнын эсептөө схемасында эске алууга болот.

Көнүгүүлөр

13.1-13.2-маселелерде каражаттарды n ишкананын арасында оптималдуу бөлүштүрүүнү, ар бир ишканадан алынуучу $f(x)$ пайдасы ага чегерилген x каражатынан көз каранды деген шартта тапкыла. Чегерүү Δx ка эселүү, $f(x)$ функциялары таблицалык түрдө берилген.

13.1. $n=3$, $\Delta x=1$, $s_0=9$,

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	24	27
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	19	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	16	18	21	22	25

13.2. $n=4$, $\Delta x=1$, $s_0=5$,

x	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1,4	1,8
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,9
$f_4(x)$	0	2,0	2,5	3,0	4,0

13.3. 13.1-маселенин шартында $s_0=8$ каражатты оптималдуу бөлүштүрүүнү тапкыла.

13.4. 13.1-маселенин шартында $s_0=9$ каражатты төрт ишкананын арасында оптималдуу бөлүштүрүүнү тапкыла. Төртүнчү ишкана үчүн пайда функциясы төмөнкү таблицада берилген.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(x)$	3	5	7	11	13	15	20	22	24

13.5. 13.2-маселенин шартында $s_0=6$ каражатты төрт ишкананын арасында оптималдуу бөлүштүрүүнү тапкыла.

13.6. 13.2-маселенин шартында каражатты 1-ишкананы чыгарып таштап, 2-,3- жана 4-ишканалардын арасында оптималдуу бөлүштүрүүнү тапкыла.

13.7-13.8-маселелерде ар бир тармактын кирешелеринин $f_1(x)$ жана $f_2(x)$ функциялары, кайтарым $q_1(x)$, $q_2(x)$ функциялары берилген болсо, s_0 каражатын өндүрүштүн I жана II тармактарынын арасында n жылга оптималдуу бөлүштүрүүнү тапкыла.

13.7. s_0=40000 б.; n=4; $f_1(x)=0{,}4x$; $f_2(x)=0{,}3x$; $\varphi_1(x)=0{,}5x$; $\varphi_2(x)=0{,}8x$.

13.8. s_0=10000 б.; n=4; $f_1(x)=0{,}1x^2$; $f_2(x)=0{,}5x$; $\varphi_1(x)=0{,}75x$; $\varphi_2(x)=0{,}3x$.

13.9. 13.7-маселени ар бир жылдын башында Δs=10000 кошумча каражат келип турган учурда чыгаргыла.

13.10-12-маселелерде жабдыктарды алмаштыруунун оптималдуу мөөнөттөрүн аныктоо маселелеринин математикалык моделдерин түзгүлө, Беллмандын теңдемелерин жазгыла жана графиктик түрдө чыгаргыла. Жабдыктын баштапкы баасы p_0, ликвиддүү наркы $\varphi(t)$, t жаштагы жабдыкка бир жылда сарпталган чыгым $r(t)$, эксплуатациялоо мөөнөтү n (бул мөөнөттүн акырында сатылат) берилген. Оптималдуулук критерийи - баштапкы сатып алуу жана акыркы сатылуу баасын эсепке алуу менен жабдыкты n жыл ичинде эксплуатациялоонун суммардык чыгымы.

13.10. $p_0=8000$; $\varphi(t)=p_0 2^{-t}$; $r(t)=0{,}1p_0(t+1)$; $n=5$.

13.11. $n=5$. Жаңы жабдыктын баасы сатып алуу баасынан көз каранды $p_k=5000+500(k-1)$, $k=1,2,3,4,5$; $\varphi(t)=p_k 2^{-t}$; $r_k(t)=0{,}1p_k(t+1)$.

13.12. $p_0=8000$; $n=5$, $\varphi(t)$ жана $r(t)$ функциялары таблицалык түрдө берилген.

t	0	1	2	3	4	5
$\varphi(t)$	-	6000	5000	3000	1000	500
$r(t)$	600	800	1100	1500	2000	-

XIV глава. ТАРМАКТУУ ПЛАНДАШТЫРУУ ЖАНА БАШКАРУУ МОДЕЛДЕРИ

14.1. Тармактуу пландаштыруу жана башкаруунун колдолунуш областтары

Татаал процесстерди пландаштыруунун эффективдүү ыкмаларын изилдөө тармактуу пландаштыруунун жана башкаруунун (ТПБ) методдорун түзүүгө алып келди.

ТПБ методдорунун системасы - ири эл чарбалык комплекстерди, илимий изилдөөлөрдү, курулуш жана реконструкцияларды тармактуу графикти колдонуу менен башкаруунун жана пландаштыруунун методдорунун системасы болуп саналат.

Тармактуу графиктер колдонулган биринчи системалар 50-ж. аягында АКШда колдонулган жана СРМ (критикалык жол методу) жана PERT (программаны жыйынтыктоо жана баалоо методу) деп аталган. Алгач СРМ курулуш иштерин башкарууда, PERT «Поларис» системасын иштеп чыгууда колдонулган.

Россияда тармактуу пландаштыруу боюнча иштер 60-ж. башталган. Анда ТПБ курулушта жана илимий иштеп чыгууларда кеңири колдонулган. Андан кийин тармактуу методдор эл чарбачылыгынын башка областтарында кеңири колдонула баштаган.

ТПБ процесси тармактуу графиктин жардамында моделдештүрүүгө негизделген жана жумуш комплексин пландаштыруу жана башкаруу боюнча уюштуруу жана текшерүү иш чараларынын методдорунун жыйындысынан турат.

ТПБ системасы:

- кандайдыр бир жумуштардын комплексин ишке ашыруунун календарлык планын түзүүгө;
- убакыт резервдерин, эмгек, материалдык жана акча ресурстарын аныктоого жана мобилизациялоого;
- жумуштардын жүрүшүндөгү үзгүлтүктөрдү прогноздоо жана эскертүү менен жумуштардын комплексин башкарууну «жетектөөчү звено» принциби боюнча жүргүзүүгө;
- жоопкерчиликти түрдүү деңгээлдеги жетекчилердин жана аткаруучулардын арасында так бөлүштүрүү менен башкаруунун эффективдүүлүгүн жогорулатууга мүмкүндүк берет.

ТПБнын колдонулуш диапазону өтө кеңири: айрым адамдардын ишмердүүлүгү менен байланышкан маселелерден баштап, 100 дөгөн уюм жана 10 миңдеген адам катышкан проекттерге чейин (м.: ири территорриялдык - өндүрүштүк комплексти иштеп чыгуу жана түзүү). *Жумуштардын комплекси* (*операциялардын комплекси* же *проект*) деп, ишке ашырылышы үчүн жетиштүү чоң сандагы ар түрдүү жумуштардын ишке ашырылышы зарыл болгон каалагандай маселени түшүнөбүз. Бул кандайдыр бир имараттын, самолёт же татаал объекттин курулушу жана бул курулуштардын проекттин иштеп чыгуу болушу мүмкүн.

Миңдеген өзүнчө изилдөөлөрдөн жана операциялардан турган ири жана таталл проекттерди ишке ашыруунун планын түзүү үчүн аны кандайдыр бир математикалык моделдин жардамында баяндоо керек. Проекттерди мындай баяндоонун каражаты болуп, *тармактуу модель* эсептелет.

14.2. Тармактуу модель жана анын негизги элементтери

Тармактуу модель тармак формасында берилген кандайдыр бир өз ара байланышкан жумуштардын (операциялардын) комплексин аткаруу планын берет жана анын графиктик сүрөттөлүшү *тармактуу график* деп аталат. Тармактуу моделдин өзгөчүлүгү болуп, алдыда аткарылууга тийиш болгон жумуштардын бардык убакттык өз ара байланыштарын так аныктоо эсептелет.

Тармактуу моделдин негизги элементери болуп окуялар жана жумуштар саналышат.

Жумуш термини ТПБда кеңири мааниде колдонулат. Бул биринчиден, *чыныгы жумуш* – кандайдыр бир убакытка созулган, ресурстарды сарптоону талап кылган процесс. Ар бир чыныгы жумуш конкреттүү, так жана жооптуу аткаруучуга ээ болууга тийиш.

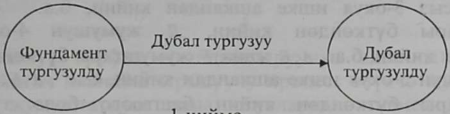
Экинчиден, *күтүү* - убакытка созулган, эмгек чыгымдарын талап кылбаган процесс. М.: сырдоодон кийинки кургатуу, металлдын эскирүүсү, бетондун катуусу ж.б.у.с.

Үчүнчүдөн, *көз карандылык* же *фиктивдүү* жумуш – эки же бир нече жумуштардын (окуялардын) арасындагы логикалык байланыш. Ал эмгек чыгымдарын, материалдык чыгымдарды сарптоону жана убакытты талап кылбайт жана бир жумуштун мүмкүнчүлүгү башка жумуштардын жыйынтыктарынан көз каранды экендигин көрсөтөт. Фиктивдүү жумуштун узактыгы нөлгө барабар деп кабыл алынат.

Окуя – бул проекттин айрым этабынын аткарылышын чагылдыруучу канндайдыр бир процесстин аяктоо моменти. Окуя бир жумуштун жекече жыйынтыгы же бир нече жумуштун суммардык жыйынтыгы болуусу мүмкүн. Окуя качан гана өзүнө чейинки жумуштардын баары бүткөндөн кийин гана ишке ашат, ал эми андан кийинки жумуштар бул окуя ишке ашкандан кийин гана башталат. Мындан окуя эки жактуу мүнөзгө ээ экендиги келип чыгат: өзүнө чейинки жумуштардын аягы, өзүнөн кийинкилердин башталышы болуп эсептелет. Мындан окуя узатыкка ээ эмес жана көз ирмемде ишке ашат деген божомолдоо кабыл алынат. Ошондуктан тармактуу моделдеги ар бир окуя толук, так жана ар тараптуу аныкталган болушу жана өзүнө чейинки жумуштардын жыйынтыктарын камтуусу керек.

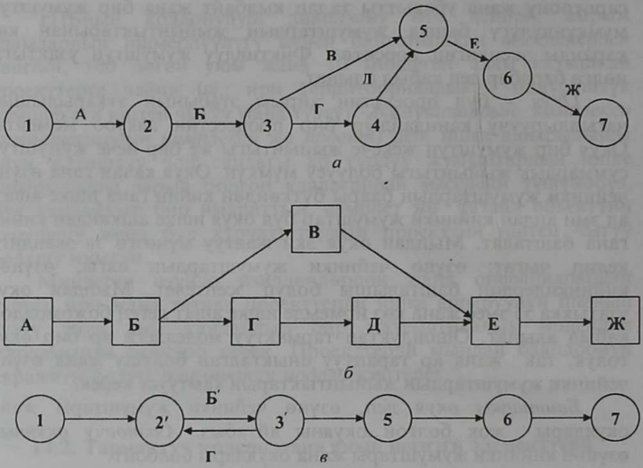
Баштапкы окуя деп, өзүнө чейинки жумуштары жана окуялары жок болгон окуяны айтабыз. *Аяктоочу окуянын* өзүнөн кийинки жумуштары жана окуялары болбойт.

Окуялар тармактуу графикте тегерекчелер менен, ал эми жумуштар стрелкалар менен сүрөттөлөт. 1-чиймеде тармактуу графикке мисал келтирилген.



1-чийме

2,*а* - чиймеде кандайдыр бир экономикалык объектти моделдештирүү жана анын оптималдуу планын аныктоо маселесинин тармактуу графиги түзүлгөн. Бул маселени чечүү үчүн төмөнкү жумуштарды аткаруу керек: *А* – изилдөөнүн проблемасын аныктоо; *Б* - үйрөнүлүп жаткан объекттин математикалык моделин түзүү; *В* – маалыматтарды чогултуу; *Г* – маселени чыгаруунун методун тандоо; *Д* – компьютер үчүн программаны иштеп чыгуу; *Е* – оптималдуу вариантты аныктоо; *Ж* – эсептөөнүн жыйынтыгын буюртмачыга берүү. Графикте окуялар цифралар менен белгиленген.



2 -чийме

Графиктен *В* жана *Г* жумуштарын бири-биринен көз-карандысыз 3-окуя ишке ашкандан кийин, б.а. *А* жана *Б* жумуштары бүткөндөн кийин, *Д* жумушун 4-окуя ишке ашкандан кийин, б.а. *А*, *Б* жана *Г* жумуштары бүткөндөн кийин, *Е* жумушун 5-окуя ишке ашкандан кийин, б.а. *А*, *Б*, *Г* жана *Д* жумуштары бүткөндөн кийин баштоого боло тургандыгы көрүнүп турат.

Жумуштар (i,j) түрүндө белгиленет, мында i жумуштун баштапкы окуясы, ал эми j аяктоочу окуясы. Мисалы, *Г* жумушун $(3,4)$ түрүндө, *Е* жумушун $(5,6)$ түрүндө белгилейбиз.

2,*а* – чиймедеги тармактуу графикте сандык баалар жок. Мындай тармак *структуралуу* деп аталат. Бирок, практикада көбүнчө жумуштардын узактыктарынын (аткарылуу мөөнөттөрүнүн) баалары (сааттарда, суткаларда, айларда ж.б. тиешелүү стрелкалардын үстүндө көрсөтүлөт), ошондой эле башка параметрлердин, мисалы эмгек сыйымдуулугунун, нарктын ж.б.у.с. баалары көрсөтүлгөн тармактар да кеңири кездешет.

Каралган тармактуу график «*окуялар - жумуштар*» тибиндеги тармак болуп саналат. Окуяларсыз да тармактарды түзүүгө болот. Мындай тармактарда тик бурчтуктар жумуштарды, ал эми стрелкалар алардын арасындагы байланышты жана аткарылуу тартибин көрсөтөт. Жогорудагы мисалдын «*жумуштар-байланыштар*» тибиндеги тармактуу графиги 2,*б* – чиймеде келтирилген.

«Жумуштар-байланыштар» тибиндеги тармактуу график «окуялар - жумуштар» тибиндеги тармакка караганда бир катар артыкчылыктарга ээ экендигин белгилей кетели. Алар фиктивдүү жумуштарды кармабайт, түзүүнүн жана кайра өзгөртүүнүн жөнөкөйүрөөк техникасына ээ, аткаруучуга жакшы тааныш болгон жумуш түшүнүгүн гана камтыйт.

Бирок, окуяларсыз тармактар бир кыйла татаал болуп саналат, анткени окуялардын саны жумуштардын санына караганда бир кыйла аз болот. Ошондуктан бул тармактар жумуштардын комплексин башкарууда анчалык эффективдүү болбойт. Ушуну менен азыркы учурдагы «окуялар - жумуштар» тибиндеги тармактын кеңири колдонууга ээ болгондугу түшүндүрүлөт.

14.3. Тармактуу графикти түзүүнүн тартиби жана эрежелери

Тармактуу график пландаштыруунун алгачкы этабында түзүлөт. Алгач пландаштырылуучу процесс өзүнчө жумуштарга бөлүнөт, жумуштардын жана окуялардын тизмеси, алардын логикалык байланышы жана аткаруу удалаштыгы такталат. Жумуштар жооптуу аткаруучуларга бекитилет жана алар аркылуу жумуштардын узактыктары аныкталат. Андан кийин тармактуу график түзүлөт. Тармактуу графикти иреттештиргенден кийин, окуялардын жана жумуштардын параметрлери эсептелет, убакыт резервдери жана критикалык жол аныкталат. Акырында тармактуу график анализделет жана оптималдаштырылат.

Тармактуу графикти түзүүдө төмөндөгүдөй эрежелерди сактоо керек:

1. *Тармактуу графикте аяктоочу окуядан сырткары «туюк» окуя, б.а.бир да жумуш-стрелка чыкпаган окуя болбош* *керек* (3,*а* – чийме). Мында *(2,3)* жумушу керек эмес жана аны алып салуу керек, же кандайдыр бир окуяны ишке ашыруу үчүн керек болгон 3-окуядан кийинки анык бир жумуштун зарылдыгы көрсөтүлгөн эмес. Мындай каталыкты жоюу үчүн жумуштардын жана окуялардын байланышын терең үйрөнүп чыгуу керек.

2. *Тармак графикте баштапкы окуядан сырткары «куйруктуу» окуя, б.а. өзүнө чейинки бир да жумуш-стрелкасы болбогон окуя болбош керек* (3,*б* – чийме). Мында 3-окуяга чейинки жумуштар каралган эмес. Ошондуктан, 3-окуя ишке ашпайт. Демек, андан кийинки *(3,5)* жумушу да аткарылбай тургандыгы келип чыгат. Тармакта мындай окуялар болгон учурда аларга чейинки жумуштарды аныктап, тармакка кошуу керек.

3. *Тармакта туюк контур же илмек, б.а. кандайдыр бир окуяларды өзү менен өзүн бириктирген жолдор болбош керек* (3,*в,г* – чийме).

2,*а* – чиймедеги тармактуу графиктеги *Б* (математикалык моделди түзүү) жана *Д* (компьютер үчүн программаны түзүү) жумуштарын бир эле *Б'* жумушуна бириктирели. Анда 2,*в* – чиймедеги тармакка ээ болобуз. $2'$-окуясы эсептөөнүн методун тандабай (*Г* жумушу) туруп жасоого мүмкүн болбогон *Б'* жумушуна өтүүгө мүмкүн экендигин көрсөтөт. Бизге эсептөөнүн методун моделди түзбөй туруп тандоого ($3'$-окуясы) мүмкүн эместиги белгилүү. Б.а. тармакта жөнөкөй $2' \rightarrow 3' \rightarrow 2'$ контуру пайда болду. Контур пайда болгондо баштапкы берилгендерге кайрылуу жана жумуштардын курамын кайра карап чыгуу менен аны жоюуга болот.

Биздин учурда *Б'* жумушун *Б* жана *Д* жумуштарына бөлүү керек.

4. *Каалагандай эки окуя бирден көп эмес жумуш–стрелкалар менен байланышуусу керек.*

Бул эрежени бузуу жарыш аткарылуучу жумуштарды сүрөттөөдө келип чыгат (3, *д* – чийме). Эгерде муну ушул боюнча калтырса, адашууга алып келет. Анткени ар түрдүү эки жумуш бир эле *(1,2)* түрүндө белгиленип калат.

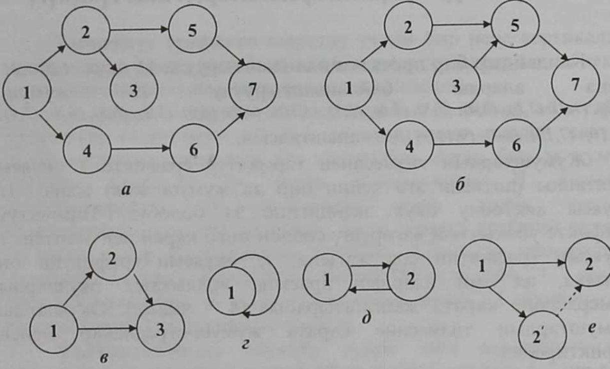
Бул учурда фиктивдүү окуя ($2'$-окуясы) жана фиктивдүү жумушту ($(2',2)$ жумушу) кийирүү керек. Мында жарыш аткарылуучу жумуштардын бири фиктивдүү окуяга чагылат.

Биздин учурда $(1,2')$ жумушу. Фиктивдүү жумуштар тармактуу графикте үзүк сызыктар менен сүрөттөлөт.

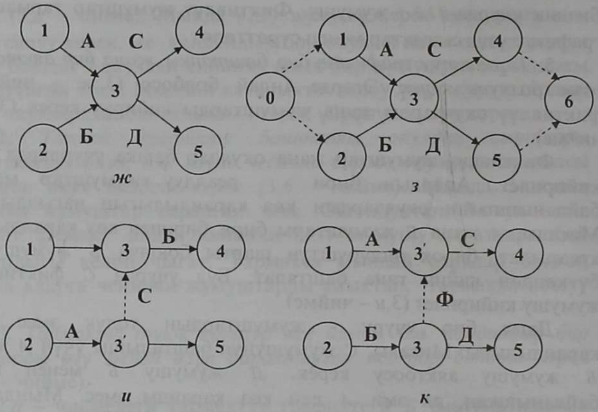
5. *Тармактуу графикте бир баштапкы жана бир аяктоочу окуя болуусу керек.* Эгерде андай болбосо (3,*ж* – чийме), фиктивдүү окуяларды жана жумуштарды кийирүү керек (3,*з* – чийме).

Фиктивдүү жумуштар жана окуялар башка учурларда да кийирилет. Алардын бири - реалдуу жумуштар менен байланышпаган окуялардын көз карандылыгын чагылдыруу. Мисалы, *А* жана *Б* жумуштары бири биринен көз карандысыз аткарылат, бирок өндүрүштүн шарты боюнча *Б* жумушу *А* бүткөндөн кийин гана башталат. Бул учурда *С* фиктивдүү жумушу кийирилет (3,*и* – чийме).

Дагы бир учуру - жумуштардын толук эмес көз карандылыгы. Мисалы, *С* жумушунун башталышы үчүн *А* жана *Б* жумушу аяктоосу керек. *Д* жумушу *Б* менен гана байланышкан, ал эми *А* дан көз каранды эмес. Мында *Ф* фиктивдүү жумушун жана $3'$ фиктивдүү окуясын кийирүү керек (3,*к* – чийме).



3-чийме



3-чийме

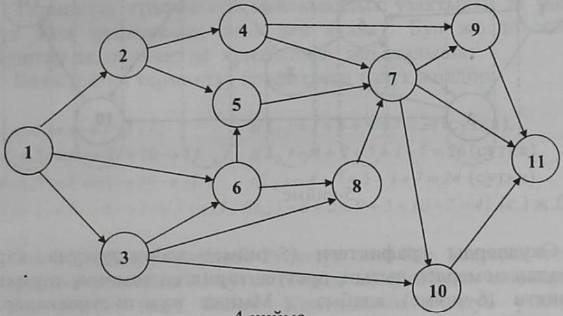
14.4. Тармактуу гарафикти иреттештирүү. Жол түшүнүгү

Кандайдыр бир проектти пландаштырууда 11 окуя: *1,2,...,11* жана аларды байланыштыруучу *19* жумуш: *(1,2), (1,3), (1,6), (2,4), (2,5), (3,6), (3,8), (3,10), (4,7), (4,9), (5,7), (6,5), (6,8), (7,9), (7,10), (7,11), (8,7), (9,11), (10,11)* аныкталсын.

Жумуштардын тизмесинен тармактуу графикте *1* окуясы баштапкы (анткени ага чейин бир да жумуш жок) жана *11* окуясы аяктоочу окуя экендигине ээ болобуз. Тармактуу графикте убакыттын өзгөрүшү солдон оңго карай деп эсептеп, *1* окуясын графиктин сол жагына, *11* окуясын графиктин оң жагына, ал эми алардын арасына аралыктык окуяларды номерлерине карата жайгаштырабыз (4 – чийме). Окуяларды жумуштардын тизмесине карата жумуш-стрелкалар менен бириктиребиз.

Түзүлгөн тармактуу график 14.3-пунктта келтирилген эрежелерге толугу менен жооп берет. Бирок, бул график толук иреттештирилбеген.

Тармактуу графикти иреттештирүү деп, каалагандай жумуштун баштапкы окуясы аяктоочу окуясына караганда сол жагыраак жайланыша тургандай жана номери кичине болгондой жумуштарды жана окуяларды жайгаштырууну түшүнөбүз. Б.а., иреттештирилген тармактуу графикте бардык жумуш – стрелкалар солдон оңду көздөй, кичине номердеги окуядан чоң номердеги окуяга карай багытталган болуусу керек.

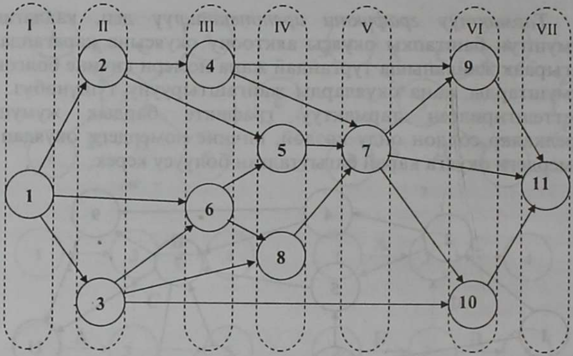


4-чийме

Тармактуу графикти шарттуу түрдө бир нече вертикалдык катмарларга бөлүп чыгабыз(аларды үзүк сызыктар менен чектеп жана рим цифралары менен белгилеп чыгабыз).

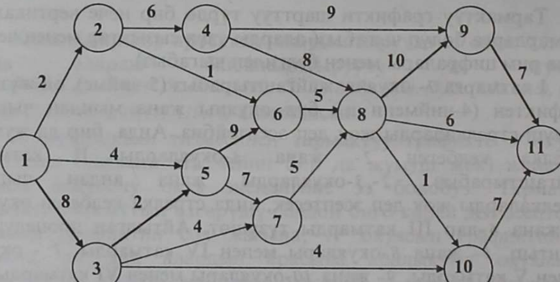
I катмарга *1*- окуяны жайгаштырабыз (5-чийме), ой жүзүндө графиктен (4-чиймени к.) бул окуяны жана мындан чыгуучу жумуш-стрелкаларды жок деп эсептейбиз. Анда, бир да жумуш-стрелка келбеген *2*- жана *3*-окуяларды II катмарга жайгаштырабыз. *2*-,*3*-окуяларды жана андан чыгуучу стрелкаларды жок деп эсептесек, анда стрелка келбеген окуялар *4*- жана *6*-лар III катмарды түзүшөт. Айтылган процедураны улантып, *5*- жана *8*-окуялары менен IV катмарды, *7* - окуясы менен V катмарды, *9*- жана *10*-окуялары менен VI катмарды, *11*-окуясы менен VII катмарды алабыз.

Жыйынтыгында, окуялар туура эмес номерленгендиги айкын болду. Анткени *5*-окуя VI катмарда, ал эми *6* - окуя ага караганда кичине номердеги катмарда жатат. *8*- жана *7*-окуялар үчүн да ушул эле сөздү айтууга болот.



5-чийме

Окуяларды графиктеги (5-чийме) жайгашуусуна карата кайрадан номерлеп чыгып, иреттештирилген төмөнкү тармактуу графикти (6-чийме) алабыз. Мында жумуш-стрелкалардын үстүндө тиешелүү жумуштардын узактыктары көрсөтүлгөн.



6-чийме

Тармактуу графиктеги негизги түшүнүктөрдүн бири болуп жол түшүнүгү саналат.

Ар бир жумуштун аяктоочу окуясы кийинки жумуштун баштапкы окуясы менен дал келген жумуштардын каалагандай удалаштыгы *жол* деп аталат. *Толук жол* деп, башталышы тармактын баштапкы окуясы менен, ал эми аягы аяктоочу окуя менен дал келген жолду айт абыз.

Жолдун узактыгы андагы жумуштардын узактыктарынын суммасы катары аныкталат жана $t(L)$ түрүндө белгиленет.

Тармактуу графиктеги максималдык узактыкка ээ болгон толук жол *критикалык жол* деп аталат. Бул жолдо жаткан жумуштар да, окуялар да критикалык деп аталышат.

Биз караган тармактуу графиктеги толук жолдор:

$L_1 : 1 \to 2 \to 4 \to 9 \to 11,\qquad t(L_1) = 2 + 6 + 9 + 7 = 24$ (сутка),
$L_2 : 1 \to 5 \to 6 \to 8 \to 10 \to 11,\qquad t(L_2) = 4 + 9 + 5 + 1 + 7 = 26$ (сутка),
$L_3 : 1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 10 \to 11,\qquad t(L_3) = 4 + 7 + 5 + 1 + 7 = 24$ (сутка),
$L_4 : 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 8 \to 9 \to 11,\ t(L_4) = 8 + 2 + 9 + 5 + 10 + 7 = 41$ (с.) ж.б.

Бул тармактуу графикте 23 толук жол бар, алардын ичинен эң узунунун узактыгы 41 сутка болгон акыркы жол, ошондуктан ал критикалык жол болот. Критикалык жолдун узактыгы $t_{kp} = t(11) = 41$ суткага барабар, б.а. жумуштардын комплексин ишке ашыруу үчүн 41 сутка талап кылынат. Мындан тезирээк комплексти бүтүрүү мүмкүн эмес, анткени аяктоочу окуяны ишке ашыруу үчүн критикалык жолду толук басып өтүү керек.

Чындыгында 11-окуяны ишке ашыруу үчүн $(9,11)$ жумушун бүтүрүү керек, б.а. 9-окуяны ишке ашыруу керек. 9-окуяны ишке ашыруу үчүн $(8,9)$ жумушун бүтүрүү керек, б.а. 8-окуяны ишке ашыруу керек. 8-окуяны ишке ашыруу үчүн $(6,8)$ жумушун бүтүрүү керек, б.а. 6-окуяны ишке ашыруу керек, ж.б.

Демек, критикалык окуялар $1,3,5,6,8,9,11$, ал эми критикалык жумуштар: $(1,3),(3,5),(5,6),(6,8),(8,9),(9,11)$ болушат.

Критикалык жол ТПБ да өзгөчө мааниге ээ, анткени бул жолдун жумуштары тармактуу графиктин жардамында пландаштырылуучу бардык жумуштардын комплексин бүтүрүүнүн жалпы циклин аныктайт. Проекттин бүтүшүн тездетүү үчүн критикалык жолдун узундугу менен критикалык жумуштардын узактыгын кыскартуу керек .

14.5. Тармактуу графиктин убакыт параметрлери

1. **Окуялардын параметрлери.** i-окуянын $t_э(i)$ эрте болуу мөөнөтү өзүнө чейинки максималдуу жолдун узундугуна барабар:

$$t_э(i) = \max_{L_{чi}} t(L_{чi}). \qquad (14.1)$$

Мында $L_{чi}$ - i- окуясына чейинки, б.а. тармактын баштапкы окуясынан бул окуяга чейинки каалагандай жол.

Эгерде j- окуя өзүнө чейинки бир нече жолго, демек, өзүнө чейинки бир нече i окуяга ээ болсо, анда j- окуянын эрте болуу мөөнөтү

$$t_э(j) = \max_{i,j}\left[t_э(i) + t(i,j)\right] \qquad (14.2)$$

формуласынан аныкталат.

Эрте болуу мөөнөтүнө карата i- окуянын бул окуянын болуу мөөнөтү менен андан кийинки максималдык жолдун узактыгынын суммасы критикалык жолдун узактыгынан ашып кетпегенге чейин кечигүүсү аяктоочу окуянын болуу мөөнөтүнө (демек, проектин бүтүү мөөнөтүнө) таасирин тийгизбейт. Ошондуктан, i- окуянын кеч болуу мөөнөтү төмөнкүчө аныкталат:

$$t_к(i) = t_{кр} - \max_{L_{кi}} t(L_{кi}). \qquad (14.3)$$

Мында $L_{кi}$ - i- окуядан кийинки, б.а. бул окуядан тармактын аяктоочу окуясына чейинки каалагандай жол.

Эгерде i- окуя бир нече өзүнөн кийинки жолго, демек, өзүнөн кийин бир нече j окуяга ээ болсо, анда i- окуянын кеч болуу мөөнөтү

$$t_к(i) = \min_{i,j}\left[t_к(j) - t(i,j)\right] \qquad (14.4)$$

формуласынан аныкталат.

i- окуянын убакыт резерви $R(i)$ анын кеч жана эрте болуу мөөнөттөрүнүн айрымасы катары эсептелинет, б.а.

$$R(i) = t_к(i) - t_э(i). \qquad (14.5)$$

Окуянын убакыт резерви жумуштардын комлексинин бүтүү мөөнөтүн кечиктирбей, бул окуянын болуусун канча убакытка чейин созууга боло тургандыгын көрсөтөт.

Критикалык окуялар убакыт резервдерине ээ болушпайт, анткени аларды кандайдыр убакытка кечиктирүү, аяктоочу окуянын ошондой эле мөөнөткө кечигисүүнө алып келет.

Мындан, критикалык жолдун узактыгын жана топологиясын билүү үчүн, бардык толук жолдорду табуу жана алардын узактыктарын эсептөө шарт эмес экендиги келип чыгат. *Тармактын аяктоочу окуясынын эрте болуу мөөнөтүн эсептөө менен критикалык жолдун узактыгын, ал эми резервдери нөлгө барабар окуяларды табуу менен анын топологиясын аныктаган болобуз.*

1-мисал. 6-чиймедеги тармактуу графиктеги окуялардын убакыт параметрлерин жана критикалык жолду тапкыла.

◊ Окуялардын эрте болуу $t_э(i)$ мөөнөттөрүн тармактуу график боюнча солдон оңго карай, (14.1)- жана (14.2)-формулалар менен эсептейбиз.

$i=1$ (1-окуя үчүн) $t_э(1)=0$ болоору айкын. $i=2$ үчүн $t_э(2)=t_э(1)+t(1,2)=0+2=2$(сутка) болот, анткени 2-окуяга чейин бир эле $L_{ч2}: 1 \to 2$ жолу бар. $i=3$ үчүн, 3-окуяга чейин бир эле $L_{ч3}: 1 \to 3$ жолу болгондуктан, $t_э(3)=t_э(1)+t(1,3)=0+8=8$(сутка) болот. Ушундай эле $i=4$ үчүн, $t_э(4)=t_э(2)+t(2,4)=2+6=8$(сутка). Ал эми 5-окуяга чейин $L_{ч5}: 1 \to 3 \to 5,\ 1 \to 5$ жолдору жана $1,3$ окуялары болгондуктан, $t_э(5)=max\{t_э(1)+t(1,5);\ t_э(3)+t(3,5)\}=max\{0+4;8+2\}= \quad =max\{4;10\}=10$ (сутка) болот.

Ушул сыяктуу эле,

$$t_э(6)=max\{t_э(2)+t(2,6); t_э(5)+t(5,6)\}=max\{2+1;10+9\}=max\{3;19\}=19 \text{(с.)};$$
$$t_э(7)=max\{t_э(3)+t(3,7); t_э(5)+t(5,7)\}=max\{8+4;10+7\}=max\{12;17\}=17 \text{(с.)};$$
$$t_э(8)=max\{t_э(4)+t(4,8); t_э(6)+t(6,8); t_э(7)+t(7,8)\}=max\{8+8;19+5;17+5\}=$$
$$=max\{16;24;22\}=24 \text{ (с.) ж.б.}$$

Эсептөөлөрдүн жыйынтыгын таблицага (1-табл.) түшүрөбүз.

Критикалык жолдун узактыгы *11*-окуянын эрте болуу мөөнөтүнө барабар, б.а.

$$t_{кр} = t_э(11) = 41 \text{(с.)}.$$

Окуялардын кеч болуу $t_к(i)$ мөөнөттөрүн тармактуу график боюнча оңдон солго карай, (14.3)- жана (14.4)-формулалар боюнча эсептейбиз.

$i = 11$ (аяктоочу окуя) үчүн, эрте жана кеч болуу мөөнөттөрү барабар болуусу керек (антпесе критикалык жолдун узактыгы өзгөрүп кетет): $t_к(11) = t_э(11) = 41$ (с.).

$i = 10$ үчүн, $t_k(10) = t_k(11) - t(10,11) = 41 - 7 = 34$ (сутка) болот, анткени *10*-окуядан кийин бир эле $L_{к10} : 10 \to 11$ жолу бар.

$i = 9$ үчүн, *9*-окуядан кийин да бир эле $L_{k9} : 9 \to 11$ жолу болгондуктан, $t_k(9) = t_k(11) - t(9,11) = 41 - 7 = 34$ (с.) болот.

$i = 8$ үчүн, *8*-окуядан кийин үч $L_{k8} : 8 \to 9 \to 11,\ 8 \to 11,\ 8 \to 10 \to 11$ жолдору болгондуктан $t_k(8) =$
$= min\{t_k(9) - t(8,9); t_k(11) - t(8,11); t_k(10) - t(8,10)\} = min\{34 - 10; 41 - 6; 34 - 1\} =$
$= min\{24; 35; 33\} = 24$.

Ушундай эле:
$t_k(7) = t_k(8) - t(7,8) = 24 - 5 = 19$ (с); $t_k(6) = t_k(8) - t(6,8) = 24 - 5 = 19$ (с.);
$t_k(5) = min\{t_k(6) - t(5,6);\ t_k(7) - t(5,7)\} = min\{19 - 9;\ 19 - 7\} = min\{10; 12\} = 10$
ж.б.

1-таблица

Окуянын номери	Окуянын болуу мөөнөттөрү		$R(i)$ убакыт резерви, сутка
	$t_э(i)$ эрте	$t_к(i)$ кеч	
1	0	0	0
2	2	10	8
3	8	8	0
4	8	16	8
5	10	10	0
6	19	19	0
7	17	19	2
8	24	24	0
9	34	34	0
10	25	34	9
11	41	41	0

(14.5)-формула боюнча окуялардын убакыт резервдерин эсептейли: $R(1)=0; R(2)=10-2=8; R(3)=8-8=0$ ж.б.

2-окуянын резерви $R(2)=8$, бул окуянын болуу мөөнөтүн проекттин аткарылуу мөөнөтүн сактоо менен, 8 суткага созууга болот дегенди түшүндүрөт. $1,3,5,6,8,9,11$ окуяларынын резервдери нөлгө барабар жана алар критикалык жолду аныкташат (6-чиймеде бул жол белгиленген). ◊

2. Жумуштардын параметрлери. Ар кандай жумуш эрте , кеч же башка аралыктык мөөнөттөрдө башталуусу (бүтүшү) мүмкүн. Мындан ары графикти оптималдаштырууда жумуш берилген интервалда каалагандай жылуусу мүмкүн.

(i,j) жумушунун эрте башталуу $t_{эб}(i,j)$ мөөнөтү баштапкы i окуясынын эрте болуу мөөнөтүнө барабар, б.а.

$$t_{эб}(i,j)=t_э(i). \tag{14.6}$$

Анда (i,j) жумушунун эрте аяктоо $t_{эа}(i,j)$ мөөнөтү

$$t_{эа}(i,j)=t_э(i)+t(i,j) \tag{14.7}$$

формуласынан табылат.

Бир да жумуш, өзүнүн аяккы j окуясынын мүмкүн болгон кеч болуу мөөнөтүнөн кеч аяктоосу мүмкүн эмес. Ошондуктан, (i,j) жумушунун кеч аяктоо $t_{ka}(i,j)$ мөөнөтү төмөнкүчө аныкталат:

$$t_{ka}(i,j)=t_k(j). \tag{14.8}$$

Ал эми кеч башталуу мөөнөтү

$$t_{kб}(i,j)=t_k(j)-t(i,j) \tag{14.9}$$

барабардыгынан эсептелет.

Мына ошентип, тармактуу моделдеги жумуштардын башталуу жана аяктоо моменттери аларды чектөөчү коңшулаш окуялар менен тыгыз байланышта болот.

Жумуштардын убакыт резервдерин кароодон мурда жолдордун резервдерин карайбыз. Мындай резервдерге бардык критикалык эмес жолдор ээ болушат. Жолдун убыкыт резерви $R(L)$ критикалык жол менен каралып жолдун узактыктарынын айырмасы катары эсептелет:

$$R(L) = t_{kp} - t(L). \qquad (14.10)$$

Жолдун резерви бул жолдо жаткан бардык жумуштардын узактыктарын суммардык түрдө канча мөөнөткө созууга боло тургандыгын көрсөтөт. Эгерде жумуштардын узактыктарын $R(L)$ден көп убакытка созсок, анда каралып жаткан жол критикалык болуп калат.

Мындан төмөнкүдөй жыйынтык чыгарууга болот: L жолунун критикалык жол менен дал келбеген (критикалык жолдун эки окуясы менен чектелген) кесиндисиндеги каалагандай жумуш резервке ээ.

Жумуштардын төрт түрдүү убакыт резервдери бар.

(i, j) жумушунун $R_m(i, j)$ толук резерви жумуш комплексинин аткарылуу мөөнөтүн өзгөртпөстөн, берилген жумуштун узактыгын канчага чоңойтууга болоорун көрсөтөт жана ал төмөнкү боюнча аныкталат:

$$R_m(i, j) = t_k(j) - t_э(i) - t(i, j). \qquad (14.11)$$

Жумуштун толук резерви бул жумуш аркылуу өтүүчү максималдуу жолдун резервине барабар. Бул резервди жумуштун баштапкы окуясы эрте болуу мөөнөтүндө жана аяктоочу окуясы кеч болуу мөөнөтүндө ишке ашса колдонууга болот.

Толук резерв бир эле жумушка таандык болбостон, ал жумуш аркылуу өтүүчү бардык толук жолдорго таандык. Аны бир эле жумушка колдонгондо, бул жумуш аркылуу өтүүчү максималдуу жолдогу бардык жумуштардын резервдери толугу менен иштетилген болот. Ал эми бул жумуш аркылуу өтүүчү максималдуу эмес жолдордун жумуштарынын резервдери колдолунган тиешелүү резервке кыскарат.

(i, j) жумушунун биринчи түрдөгү жекече $R_1(i, j)$ резерви, баштапкы окуясынын кеч болуу мөөнөтүн өзгөртпөстөн, жумуштун узактыгын канчага чоңойтууга мүмкүн экендигин көрсөтүүчү толук резервдин бөлүгү болуп саналат. Бул резервди

жумуштун баштапкы жана аяктоочу окуялары эң кеч мөөнөттөрүндө болгондо колдонууга болот.

$R_1(i,j)$ резерви

$$R_1(i,j) = t_k(j) - t_k(i) - t(i,j), \tag{14.12}$$

$$R_1(i,j) = R_m(i,j) - R(i) \tag{14.13}$$

формулаларынан эсептелет.

(i,j) жумушунун экинчи түрдөгү жекече же эркин $R_э(i,j)$ резерви аяктоочу окуясынын эрте болуу мөөнөтүн өзгөртпөстөн, жумуштун узактыгын канчага чоңойтууга мүмкүн экендигин көрсөтүүчү толук резервдин бөлүгү болуп эсептелет. Бул резервди жумуштун баштапкы жана аяктоочу окуялары эң эрте мөөнөттөрүндө болгондо колдонууга болот.

$R_э(i,j)$ резерви

$$R_э(i,j) = t_э(j) - t_э(i) - t(i,j), \tag{14.14}$$

$$R_э(i,j) = R_m(i,j) - R(j) \tag{14.15}$$

формулалары менен эсептелет.

Эркин резервдерди жумуштардын жүрүшүндө пайда болуучу кокустуктардын алдын алуу үчүн колдонууга болот. Жумуштардын аткарылуусун эрте башталуу жана аяктоо мөөнөттөрүндө пландаштырсак, анда анын кеч башталуу жана аяктоо мөөнөттөрүнө дайыма зарыл учурда өтүү мүмкүндүгү пайда болот.

(i,j) жумушунун көз карандысыз $R_к(i,j)$ резерви өзүнө чейинки бардык жумуштар кеч мөөнөтүндө аяктаганда, ал эми андан кийинки бардык жумуштар эрте мөөнөттөрүндө башталгандагы толук резервдин бөлүгү болуп эсептелет.

$R_к(i,j)$ резервин төмөнкү формулалар боюнча аныктоого болот:

$$R_к(i,j) = t_э(j) - t_к(i) - t(i,j) \tag{14.16}$$

же

$$R_к(i,j) = R_э(i,j) - R(i). \tag{14.17}$$

Көз карандысыз резервди колдонуу башка жумуштардын убакыт резервдерине таасирин тийгизбейт. Көз карандысыз резервдерди алдыдагы жумуштар кеч мөөнөтүндө аяктап, ал эми кийинки жумуштарды эрте бүтүрүү зарылдыгы болгондо колдонууга болот. Эгерде (14.16)- же (14.17)-формулалар менен эсептелүүчү резервдин мааниси оң сан же нөлгө барабар болсо, анда мындай мүмкүнчүлүк болот. Эгерде бул чоңдук терс болсо, мындай мүмкүнчүлүк болбойт. Анткени алдыдагы жумуш бүтпөй туруп, кийинки жумушту баштоого туура келет. $R_к(i,j)$ резервинин терс мааниси мааниге ээ эмес.

Критикалык жолдо жатышкан жумуштар критикалык окуялар сыяктуу эле убакыт резервдерине ээ болушпайт.

2-мисал. 6-чиймедеги тармактуу графиктеги жумуштардын убакыт параметрлерин тапкыла.

◊ Эсептөөнүн жыйынтыгын 2-таблицага түшүрөбүз.

Жумуштардын убакыт параметрлерин эсептөөнү $(3,7)$ жумушунун мисалында көрсөтөбүз:

жумуштун эрте башталуу мөөнөтү ((14.6)-формула боюнча): $t_{эб}(3,7)=t_э(3)=8$ (сутка);

жумуштун эрте аяктоо мөөнөтү ((14.7)-формула боюнча): $t_{эа}(3,7)=t_э(3)+t(3,7)=8+4=12$ (сутка);

жумуштун кеч башталуу мөөнөтү ((14.9)-формула боюнча): $t_{кб}(3,7)=t_к(7)-t(3,7)=19-4=15$ (сутка), мында $t_к(7)=19$ (1-табл. к.);

жумуштун кеч аяктоо мөөнөтү ((14.8)-формула боюнча): $t_{ка}(3,7)=t_к(7)=19$ (сутка).

Ошентип, $(3,7)$ жумушу проекттин башталышынан эсептегенде [8;15] (сутка) аралыгында башталышы жана [12;19] (сутка) аралыгында аяктоосу керек.

$(3,7)$ жумушунун толук убакыт резерви ((14.11)-формула боюнча): $R_m(3,7)=t_к(7)-t_э(3)-t(3,7)=19-8-4=7$ (сутка), б.а. жумуштардын комплексинин аткарылуу мөөнөтүн өзгөртпөстөн бул жумуштун аткарылуу мөөнөтүн 7 суткага чейин созууга болот.

$(3,7)$ жумушунун биринчи түрдөгү жекече убакыт резерви (14.12)-формула (же (14.13)-формула) боюнча: $R_I(3,7)=t_к(7)-t_к(3)-t(3,7)=19-8-4=7$ (с.) (же $R_I(3,7)=R_m(3,7)-R(3)=$ $=7-0=7$ (с.)).

$(3,7)$ жумушунун эркин убакыт резерви (14.14)-формула (же (14.15)-формула) боюнча: $R_э(3,7)=t_э(7)-t_э(3)-t(3,7)=17-8-4=5$ (с.) (же $R_э(3,7)=R_m(3,7)-R(7)=7-2=5$ (с.)).

(3,7) жумушунун көз карандысыз убакыт резерви (14.16)-формула (же (14.17)-формула) боюнча: $R_к(3{,}7) = t_э(7) - t_к(3) - t(3{,}7) = 17 - 8 - 4 = 5$ (с.) (же $R_к(3{,}7) = R_э(3{,}7) - R(3) = 5 - 0 = 5$ (с.)).

2-таблица

№ к/н	*(i, j)* жумушу	Жумуштун узактыгы, $t(i,j)$	Жумуштун башталуу жана аяктоо мөөнөттөрү				Жумуштун убакыт резервдери			
			$t_{эб}(i,j)$	$t_{эа}(i,j)$	$t_{кб}(i,j)$	$t_{ка}(i,j)$	$R_m(i,j)$	$R_1(i,j)$	$R_э(i,j)$	$R_к(i,j)$
1	(1,2)	2	0	2	8	10	8	8	0	0
2	(1,3)	8	0	8	0	8	0	0	0	0
3	(1,5)	4	0	4	6	10	6	6	6	6
4	(2,4)	6	2	8	10	16	8	0	0	-
5	(2,6)	1	2	3	18	19	16	8	16	8
6	(3,5)	2	8	10	8	10	0	0	0	0
7	(3,7)	4	8	12	15	19	7	7	5	5
8	(3,10)	4	8	12	30	34	22	22	13	13
9	(4,8)	8	8	16	16	24	8	0	8	0
10	(4,9)	9	8	17	25	34	17	9	17	9
11	(5,6)	9	10	19	10	19	0	0	0	0
12	(5,7)	7	10	17	12	19	2	2	0	0
13	(6,8)	5	19	24	19	24	0	0	0	0
14	(7,8)	5	17	22	19	24	2	0	2	0
15	(8,9)	10	24	34	24	34	0	0	0	0
16	(8,10)	1	24	25	33	34	9	9	0	0
17	(8,11)	6	24	30	35	41	11	11	11	11
18	(9,11)	7	34	41	34	41	0	0	0	0
19	(10,11)	7	25	32	34	41	9	0	9	0

Жумуштун толук резерви ал жумуш аркылуу өткөн максималдуу жолдун резервине барабар экендигин *(2,4)* жумушунун мисалында көрсөтөбүз.

(2,4) жумушу аркылуу 4 толук жол өтөт:

$L_1 : 1 \to 2 \to 4 \to 9 \to 11$, $t(L_1) = 24$ (сутка),
$L_2 : 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 9 \to 11$, $t(L_2) = 33$ (сутка),
$L_3 : 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 11$, $t(L_3) = 22$ (сутка),
$L_4 : 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 10 \to 11$, $t(L_3) = 24$ (сутка).

Мындан максималдуу жолдун узактыгы $t(L_2)=33$ (сутка), анын резерви (14.10)-формула боюнча $R(L_2)=41-33=8$ (сутка) экендигине ээ болобуз.

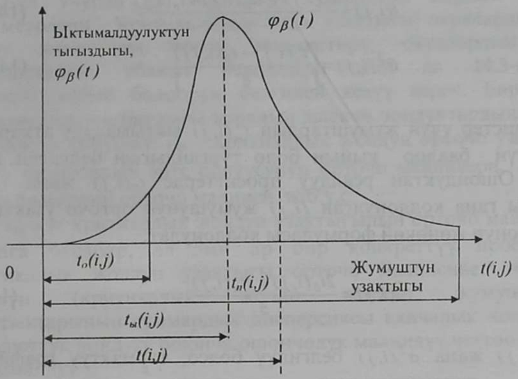
Демек, $(2,4)$ жумушунун толук резерви ал аркылуу өткөн максималдуу жолдун резервине барабар. Эгерде бул жумуштун аткарылуу мөөнөтүн 8 суткага созсок, анда L_2 жолунун резерви толук иштетилет, б.а. бул жол критикалык болуп калат да, башка жолдордун узактыгы 8 суткага кыскарат. ◊

14.6. Анык эмес шарттарда тармактуу пландаштыруу

Буга чейин тармактуу графиктин убакыт параметрлерин аныктоодо ар бир жумуштун аткарылуу мөөнөтү так белгилүү деп болжомолдогон. Мындай божомолдоо чындыгында сейрек аткарылат: анткени ТПБ системасы буга чейин каралбаган татаал иштелмелерди пландаштырууда колдонулат. Тармактуу графиктеги жумуштарды узактыктары алдын ала белгисиз болот жана мүмкүн болгон маанилердин бирин кабыл алуусу мүмкүн. Б.а. жумуштарды узактыктары $t(i,j)$ өзүнүн бөлүштүрүү закону, демек, $\bar{t}(i,j)$- орточо маани же математикалык күтүү жана $\sigma^2(i,j)$ дисперсия сандык мүнөздөөчүлөрү менен мүнөздөлүүчү кокустук чоңдук болуп саналат.

Бардык ТПБ системаларында жумуштардын узактыктарынын бөлүштүрүүсү үч касиетке ээ деп кабыл алынып: а) үзгүлтүксүздүк; б) унимодалдуулук, б.а. бөлүштүрүү ийрисинин максимумунун жалгыздыгы; в) бөлүштүрүү ийрисинин Ox огу менен терс эмес абсциссага ээ болгон эки чекитте кесилишүүсү.

Андан сырткары, жумуштардын узактыктарынын бөлүштүрүүсү *оң ассиметрияга* ээ экендиги, б.а. бөлүштүрүү ийрисинин максимуму медиананын (ийринин төмөн жагындагы аянтты барабар эки бөлүккө бөлүүчү сызыктын) оң жагында жайланышкандыгы аныкталган. Эреже катары бөлүштүрүү минималдык t маанисинен алыстоодо чукул көтөрүлөт, ал эми максималдык маанисине жакындоодо акырындык менен ылдыйлайт(7-чийме).



7-чийме

Ушундай касиеттерге ээ болгон эң жөнөкөй бөлүштүрүү болуп математикалык статистикадагы белгилүү β - *бөлүштүрүүсү* саналат. Чоң сандагы статистикалык берилгендердин (нормативдик берилгендер, айрым жумуштарды ишке ашыруу убакыттарынын хронометраждары ж.б.) анализи β - *бөлүштүрүүнү* бардык жумуштар үчүн априордук катары колдонууга мүмкүн экендигин көрсөтөт.

(i,j) жумушунун $\bar{t}(i,j)$ жана $\sigma^2(i,j)$ сандык мүнөздөчүлөрүн аныктоо үчүн проекттин жооптуу аткаруучуларын жана эксперттерди суроонун негизинде төмөндөгүдөй үч баа аныкталат:

а) $t_0(i,j)$ *оптимисттик баа* ,б.а. (i,j) жумушунун эң ыңгайлуу шарттардагы узактыгы;

б) $t_п(i,j)$ *пессимисттик баа*, б.а. (i,j) жумушунун эң ыңгайсыз шарттардагы узактыгы;

в) $t_ы(i,j)$ *ыктымалдуу баа*, б.а. (i,j) жумушунун нормалдуу шарттардагы узактыгы.

(i,j) жумушунунун узактыктарынын β - бөлүштүрүүсү жөнүндөгү божомолдоо сандык мүнөздөөчүлөрүн төмөнкүчө аныктоого мүмкүндүк берет:

$$\bar{t}(i,j)=\frac{t_0(i,j)+4t_ы(i,j)+t_n(i,j)}{6}\ , \qquad (14.18)$$

$$\sigma^2(i,j)=\left[\frac{t_n(i,j)-t_0(i,j)}{6}\right]^2. \qquad (14.19)$$

Адистер үчүн жумуштардын $t_ы(i,j)$ ыктымалдуу аткарылуу мөөнөтүн баалоо кыйын боло тургандыгын белгилей кетүү керек. Ошондуктан реалдуу проекттерде $t_0(i,j)$ жана $t_n(i,j)$ баалары гана колдонулган (i,j) жумушунун орточо узактыгын аныктоонун жөнөкөй формуласы колдонулат:

$$\bar{t}(i,j)=\frac{2t_0(i,j)+3t_n(i,j)}{5}. \qquad (14.20)$$

$\bar{t}(i,j)$ жана $\sigma^2(i,j)$ белгилүү болсо, тармактуу графиктин убакыт параметирлерин аныктоого жана алардын ишенимдүүлүгүн баалоого болот.

L жолуна таандык болгон жумуштардын саны жетишээрдик чоң болгондо жана кээ бир жалпы шарттардын аткарылуусунда Ляпуновдун борбордук пределдик теоремасын колдонууга болот. Анын негизинде L жолунун жалпы узактыгынын $\bar{t}(L)$ орточо мааниси түзүүчү жумуштарынын $\bar{t}(i,j)$ орточо узактыктарынын суммасына барабар жана $\sigma^2(L)$ дисперсиясы тиешелүү $\sigma^2(i,j)$ дисперсиялардын суммасына барабар бөлүштүрүүнүн нормалдуу законуна ээ экендигин көрсөтүүгө болот:

$$\bar{t}(L)=\sum_{i,j}\bar{t}(i,j), \qquad (14.21)$$

$$\sigma^2(L)=\sum_{i,j}\sigma^2(i,j). \qquad (14.22)$$

6-чиймедеги графиктеги жумуштардын узактыктары фиксирленген эмес, кокустук чоңдук жана андагы стрелкалардын үстүндөгү цифралар (14.18)- же (14.20)-формулалар менен эсептелинген тиешелүү жумуштардын узактыктарынын орточо маанилери болсун жана (14.19) –формулалар менен эсептелинген бардык $\sigma^2(i,j)$ дисперсиялары белгилүү болсун.

Бул учурда да тармактуу графиктин бардык убакыт параметрлери – критикалык жолдун узактыгы, окуялардын эрте болуу жана кеч болуу мөөнөттөрү, окуялардын жана жумуштардын убакыт резервдери ж.б. да 14.5-пунктта эсептелингендей болоорун белгилей кетүү керек. Бирок бул параметрлердин бардыгы каралып жаткан чоңдуктардын орточо маанилери болушат: $\bar{t}_{кр}$ - критикалык жолдун орточо узактыгы, $\bar{t}_э(i)$ - окуялардын эрте болуусунун орточо маанилери, $R_m(i,j)$ - толук резервдин орточо мааниси ж.б.у.с.

$\bar{t}_{кр} = 41$ критикалык жолдун узактыгынын орточо мааниси 41 суткага барабар, ал эми ар бир конкреттүү проекттерде критикалык жолдун узактыгы орточо маанисинен четтөөсү мүмкүн (критикалык жолдо жаткан жумуштардын узактыктарынын суммардык дисперсиясы канчалык чоң болсо, абсолюттук чоңдугу боюнча ошончолук маанилүү четтөө болушу ыктымалдуу).

Ошондуктан жумуштарынын узактыктары кокустук сандар болгон тармактуу графиктин баштапкы анализи, эреже катары тармактын убакыт параметирлерин эсептөө менен чектелбейт. Анализдин маанилүү моменти болуп, проекттин $t_{кр}$ аткарылуу мөөнөтүнүн берилген директивдүү T мөөнөтүнөн ашып кетпөөсүнүн ыктымалдуулугунун баалоо саналат.

$t_{кр}$ нормалдуу бөлүштүрүү законуна ээ болгон кокустук чоңдук деп эсептеп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$P(t_{кр} \le T) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right). \tag{14.23}$$

Мында $\Phi(z)$, $z = \dfrac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}$ - Лапластын ыктымалдуулугунун интегралдык мааниси; $\sigma_{кр}$ –критикалык жолдун узактыгынын орточо квадраттык четтөөсү

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\sigma^2_{кр}}, \tag{14.24}$$

ал эми $\bar{t}_{кр}$, $\sigma^2_{кр}$ тиешелүү түрдө (14.21)- жана (14.22)-формулалардан аныкталышат.

Эгерде $P(t_{кр} \le T)$ кичине сан болсо (мисалы, 0,3 төн кичине) комплекстин берилген мөөнөттө аткарылуусунун үзгүлтүккө учуроо коркунучу жогору, кошумча чараларды көрүү зарыл болот (тармактар боюнча ресурстарды кайрадан бөлүштүрүү, окуялардын жана жумуштардын курамын карап чыгуу ж.б.). Эгерде $P(t_{кр} \le T)$ ыктымалдуулугу 0,8 ден чоң болсо, анда белгилүү ишенимдүүлүктө комплекс берилген мөөнөттө аткарылат деп прогноздоого болот.

Кээ бир учурларда тескери маселени чыгаруу да кызыгууну пайда кылат: берилген β ыктымалдуулугундагы проекттин аткарылуусунун максималдуу T мөөнөтүн аныктоо. Бул учурда

$$T = \bar{t}_{kp} + z_\beta \sigma_{kp}, \qquad (14.25)$$

мында z_β- кокустук чоңдуктун нормаланган четтөөсү жана Лапластын $\Phi(z_\beta) = \beta$ функциясынын жардамында аныкталат.

Мисал. 6-чиймедеги тармактуу графиктеги критикалык жолдогу жумуштардын узактыктарынын дисперсиясы белгилүү болсун: $\sigma^2(1,3) = 3,5;\ \sigma^2(3,5) = 3;$ $\sigma^2(5,6) = 2,5;\ \sigma^2(6,8) = 4,1;$ $\sigma^2(8,9) = 3,1;$ $\sigma^2(9,11) = 2,6$. Проекттин $T = 44$ суткада аткарылуусунун ыктымалдуулугун тапкыла.

◊ (14.22)- жана (14.24)-лердин негизинде

$$\sigma_{kp} = \sqrt{\sigma^2(1,3) + \sigma^2(3,5) + \sigma^2(5,6) + \sigma^2(6,8) + \sigma^2(8,9) + \sigma^2(9,11)} =$$

$$= \sqrt{3,5 + 3 + 2,5 + 4,1 + 3,1 + 2,6} = \sqrt{18,8} \approx 4,3,$$

$$P(t_{kp} \le 44) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{44-41}{4,3}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{3}{4,3}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(0,6977) =$$

$$= 0,5 + 0,258 = 0,758 \approx 0,76,$$

б.а. белгилүү тобокел менен проектти берилген мөөнөттө аткарылат деп божомолдоого болот.

Эми тескери маселени карайбыз: проекттин $\beta = 0,95$ ыктымалдуулугунда аткарылуусунун максималдуу T мөөнөтүн аныктагыла.

(14.25)-формула боюнча $T = 41 + z_{0.95} \cdot 4{,}3 = 41 + 1{,}96 \cdot 4{,}3 \approx 47$, б.а. $\beta = 0{,}95$ ыктымалдуулугунунда проекттин аткарылуу мөөнөтү 47 суткадан ашып кетпейт. ◊

Берилген тармактуу график үчүн $P(t_{kp} \leq T)$ жана T жакындаштырылган бааларды гана аныктай алаарыбызды же Ляпуновдун теоремасынын негизиндеги t_{kp} кокустук чоңдугунун нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ экендиги жөнүндөгү жыйынтык, критикалык жумуштардын саны жетишердик чоң санда болгондо гана туура боло тургандыгын белгилей кетүү керек.

Бирок, эсептөөнүн келтирилген методунун көп сандагы жумуштуу татаал тармактардын параметрлерин баалоодо да кемчиликтери бар. Практикада критикалык эмес (бирок критикалыкка жакын) жолдордун $\sigma^2(L)$ дисперсиясы $\sigma^2{}_{kp}$ караганда дээрлик чоң болгон учурлар сейрек эмес кездешет. Ошондуктан берилген конкреттүү жумуш комплексинде бир катар шарттардын өзгөрүшү менен эсептөөдө эске алынбаган жаңы критикалык жолдорго өтүүгө мүмкүн.

Жумуштарынын узактыктары детерминирленген жана кокустук болгон тармактардын айырмасын детерминирленген жана стохастикалык тармактардын айрымасы менен чаташтырбоо керек. Акыркы айырма тармактардын структурасы менен байланышкан.

Буга чейин каралган тармактар жумуштарынын узактыктары детерминирленген же кокустук сандар менен берилгендигине карабастан *детерминирленген тармактар* болуп саналышат. Кандайдыр бир этапта кийинки жумуштардын бул же тигил комплекси алдын ала белгисиз жыйынтыктан көз каранды болгон проекттер кездешет. Чындыгында бул комплекстердин кайсынысы аткарылаары алдын ала белгисиз, кандайдыр бир ыктымалдуулукта айтылышы мүмкүн. Мисалы, тажрыйбанын жыйынтыктарынын негизинде изилдөөнү улантуунун же сырьелорду кайра иштеп чыгуучу түрдүү кубаттуулуктагы иш каналарды куруунун бул сырьенун запастарын карап чыгуунун негизинде бир нече варианттары каралган болушу мүмкүн. Мындай тармактар *стохастикалык* деп аталышат.

Стохастикалык тармактар, детерминирленген тармак сыяктуу эле детерминирленген же кокустук узактыктар менен мүнөздөлүшү мүмкүн.

14.7. Жумуштун басымдуулук коэффиценти. Тармактуу графикти анализдөө жана оптималдаштыруу

Критикалык жолду, жумуштардын убакыт резервдери жана проекттин берилген мөөнөттө бүтүшүнүн ыктымалдуулугунун баалары эсептелингенден кийин тармактуу графикке ар тараптан анализ жүргүзүлүшү жана аны оптималдаштыруу боюнча иш чаралар кабыл алынган болушу керек. Тармактуу графикти иштеп чыгуудагы бул маанилүү этап ТБПнын негизги идеясын ачып көрсөтөт. Ал тармактуу графикти берилген мөөнөттөргө жана проектти каралып жаткан ишкананын мүмкүнчүлүгүнө шайкеш келтирүүнү түшүндүрөт.

Алгач жумуштардын узактыктарынын баалары гана берилген календардык тармакты анализдөөнү жана оптимизациялаштырууну карайбыз.

Тармактуу графиктин анализи тармактуу графиктин түзүлүшүн текшерүүнү, жумуштардын максатка ылайык тандалышын жана алардын тармакталуу даражасын камтыган тармактын топологиясын анализдөөдөн башталат.

Андан кийин жумуштарды толук резерви боюнча классификациялоо жана топтоштуруу башталат. Толук резерв чоңдугу бул же тигил критикалык эмес жумуштун берилген мөөнөттө аткарылуу деңгээлин толугу менен мүнөздөй албай тургандыгын белгилей кетүү керек. Бардыгы эсептелинген резерв кандай жумуштардын удаалаштыгына тарайт, бул удалаштыктын узактыгы кандай экендигинен көз каранды болот.

(i, j) жумушунун $K_б(i, j)$ *басымдуулук коэффициенти* деп, бул жумуш аркылуу өткөн максималдуу узактыкка ээ болгон жол менен критикалык жолдун дал келбеген кесиндилеринин (бирдей окуялар менен чектелген) узактыктарынын катышын айтабыз, б.а.

$$K_б(i, j) = \frac{t(L_{max}) - t'_{kp}}{t_{kp} - t'_{kp}}, \tag{14.26}$$

мында $t(L_{max}) - (i, j)$ жумушу аркылуу өткөн максималдуу жолдун узундугу; t_{kp} - критикалык жолдун узундугу; t'_{kp} - (i, j) жумушу аркылуу өткөн максималдуу жол менен критикалык жолдун дал келген кесиндисинин узундугу.

(14.26)-формуланы төмөнкүчө да жазууга болот:

$$K_б(i,j) = 1 - \frac{R_m(i,j)}{t_{kp} - t'_{kp}}, \qquad (14.27)$$

мында $R_m(i,j)$ - (i,j) жумушунун толук убакыт резерви.

$K_б(i,j)$ басымдуулук коэффициенти 0дөн (максималдык жолдун критикалык жол менен дал келбеген бөлүгү фиктивдүү жумуштардан турган жумуштар үчүн) менен 1дин (критикалык жолдун жумуштары үчүн) аралыгында болот.

Мисал. 6-чиймедеги $(2,4)$ жумушунун басымдуулук коэффициентин тапкыла.

◊ Биз буга чейин критикалык жолдун узактыгы $t_{kp} = 41(c.)$, ал эми $(2,4)$ жумушу аркылуу өткөн максималдуу жол $L_2 : 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 9 \to 11$ жана анын узактыгы $t(L_2) = t(L_{max}) = 33$ (с.) экендиги белгилүү.

Максималдуу L_2 жолу критикалык жол менен $8 \to 9 \to 11$ кесиндисинде кесилишет (6-чиймени к.) жана анын узактыгы $t'_{kp} = 10 + 7 = 17\ (c)$. Анда (14.26)-дан

$$K_б(2,4) = \frac{33-17}{41-17} = \frac{16}{24} \approx 0{,}67$$

ге ээ болобуз. $R_m(2,4) = 8$ толук резервди пайдаланып, (14.27)-формуланын негизинде

$$K_б(2,4) = 1 - \frac{8}{41-17} = \frac{16}{24} \approx 0{,}67 \ . \ ◊$$

$K_б(i,j)$ басымдуулук коэффициенти канчалык 1ге жакын болсо, көрсөтүлгөн мөөнөттө жумушту бүтүрүү ошончолук кыйын болот. Ал эми канчалык нөлгө жакын болсо, тиешелүү жумуш аркылуу өткөн максималдуу жол ошончолук чоң салыштырмалуу резервге ээ болот. Жумуштар бирдей толук резервге ээ болушу мүмкүн, бирок $K_б(i,j)$ басымдуулук коэффициенти менен туюнтулган жумуштардын берилген мөөнөтүндө аткарылышынын деңгээли ар түрдүү болушу мүмкүн. Тескерисинче, жумуштардын толук резервдер түрдүүчө болгону менен басымдуулук коэффициенти бирдей болушу мүмкүн.

Бир жумуштун башкаларга караганда чоң толук резервге ээ болушу, анын мөөнөтүндө аткарылышынын деңгээли кичине болушун түшүндүрбөйт. Каралган тармакта $(3,10)$ жумушу $(2,6)$ жумушуна караганда чоң толук резервге ээ: $R_m(3,10)=22>R_m(2,6)=16$, бирок экинчиге караганда эки эсе чоң басымдуулук коэффицентине ээ болот $K_б(3,10)=\frac{1}{3}\approx 0,33; K_б(2,6)=\frac{3}{19}\approx 0,16$. Бул максималдуу жолдун критикалык жол менен дал келбеген кесиндилеринин узактыгындагы жумуштардын толук резервдеринин салыштырмалуу салмагы менен түшүндүрүлөт.

Эсептелинген басымдуулук коэффициенттери жумуштарды зоналар боюнча кошумча классификациялоого мүмкүндүк берет. $K_б(i,j)$ коэффициентине карата жумуштар үч зонага бөлүнүшөт: *критикалык зона* $(K_б(i,j)>0,8)$, *критикалык зонанын алдындагы зона* $(0,6\le K_б(i,j)\le 0,8)$, *резервдик зона* $(K_б(i,j)<0,6)$.

*Тармактуу графикти **оптималдаштыруу*** деп, жумуш комплексинин аткарылышын уюштурууну аткарылуу мөөнөтүн эске алуу менен жакшыртуу процессин түшүнөбүз. Оптималдаштыруу жумуштардын басымдуулук коэфициенттерин барабарлап, ресурстарды рационалдуу пайдалануу менен критикалык жолду кыскартуу максатында жүргүзүлөт.

Биринчи кезекте критикалык жолдогу жумуштардын узактыгын кыскартуу боюнча чаралар көрүлөт. Бул төмөндөгүчө ишке ашат:

- убакыт ресурстарын (критикалык эмес жолдордун убакыт резервдерин пайдалануу), эмгек, материалдык, энергетикалык (мисалы, критикалык эмес жолдордогу аткаруучулардын, жабдыктардын айрым бөлүгүн критикалык жолго алып өтүү) ж.б. бардык түрдөгү ресурстарды кайрадан бөлүштүрүү; мында ресурстарды кайрадан бөлүштүрүү эреже катары мөөнөтүндө аткарылуу деңгээли төмөн зонадан чоңураак зонага карай болушу керек;
- критикалык жумуштардын эмгек көлөмүн жумуштардын айрым бөлүгүн убакыт резервке ээ болгон башка жолдорго берүү менен азайтуу;
- критикалык жолдогу жумуштарды параллель аткаруу;

- тармактын структурасын жана жумуштардын курамын өзгөртүү, тармактын топологиясын кайрадан карап чыгуу.

Жумуштардын узактыктарын кыскартуу процессинде критикалык жол өзгөрүшү мүмкүн, анда кийинки оптималдаштыруу процессинде жаңы критикалык жолдун жумуштарынын узактыктары кыскартылат жана бул тийиштүү жыйынтык алынганга чейин улантылат. Идеалдуу тармакта каалагандай толук жолдун узактыгы критикалык жолдун же жок дегенде критикалык зонанын жолунун узактыгына барабар болуусу керек. Анда бардык жумуштардын аткарылуу деңгээли бирдей болот, ал эми проекттин аткарылуу мөөнөтү кыскарат.

14.8. Тармактуу графикти «убакыт - нарк» методу менен оптималдаштыруу

Тармактуу графикти оптималдаштыруу коюлуучу маселенин толуктугуна жараша шарттуу түрдө жекече жана комплекстүү болуп бөлүнөт. *Жекече оптималдаштырууга* жумуштардын комлексинин наркы белгилүү болгон учурда анын аткарылуу мөөнөтүн минималдаштыруу; проекттин берилген аткарылуу мөөнөтүндө анын наркын минималдаштыруулар кирет.

Комплекстүү оптималдаштыруу коюлган конкреттүү максаттын негизинде проекттин аткарылуу мөөнөтү менен наркынын ортосундагы оптималдуу катышты аныктоодон турат.

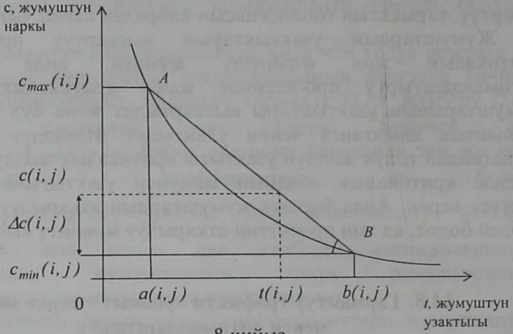
«Убакыт - нарк» методун колдонууда жумуштун аткарылуу мөөнөтүнүн азайышы анын наркынын өсүшүнө пропорционалдуу деп божомолдонот. Ар бир (i, j) жумушу

$$a(i, j) \leq t(i, j) \leq b(i, j) \qquad (14.28)$$

пределинде болгон $t(i, j)$ узактыгы менен мүнөздөлөт. Мында $a(i, j)$ - (i, j) жумушунун мүмкүн болгон минималдуу узактыгы; $b(i, j)$ - (i, j) жумушунун нормалдуу узактыгы.

Ал эми (i, j) жумушунун $c(i, j)$ наркы c_{min} (жумуштар нормалдуу мөөнөттөрүндө аткарылганда) менен c_{max} (жумуштар минималдуу мөөнөттөрүндө аткарылганда) чегинде болот, б.а. :

$$c_{min}(i, j) \leq c(i, j) \leq c_{max}(i, j).$$



8-чийме

Чиймедеги AB түзү боюнча жумуштун узактыгы азайган учурда анын наркынын өзгөрүүсүн

$$\Delta c(i,j) = [b(i,j) - t(i,j)]h(i,j) \tag{14.29}$$

формуласынан аныктоого болот. Мында $h(i,j)$ - (i,j) жумушунун узактыгын убакыт бирдигине тездетүүгө кеткен чыгым коэффициентин берет жана ал AB түзүнүн α жантаюу бурчунун тангенсине барабар, б.а.:

$$h(i,j) = \frac{c_{max}(i,j) - c_{min}(i,j)}{b(i,j) - a(i,j)} = tg\alpha . \tag{14.30}$$

Жекече оптималдаштырууда жумуштардын убакыт резервдери пайдаланылат. Убакыт резервке ээ болгон ар бир жумуштун узактыгын резервдери толук иштетилгенге чейин же $b(i,j)$ жогорку чегине чейин узартылат. Анда, оптималдаштырууга чейинки проекттин

$$C = \sum_{i,j} c(i,j) \tag{14.31}$$

наркы

$$\Delta C = \sum_{i,j} \Delta c(i,j) = \sum_{i,j} [b(i,j) - t(i,j)] h(i,j) \qquad (14.32)$$

чоңдугуна кичинерет.

Тармактуу графикти жекече оптималдаштыруу үчүн жумуштардын $t(i,j)$ узактыгынан сырткары, узактыгынын чек аралык маанилери $a(i,j)$, $b(i,j)$ лар жана жумуштарды тездетүүгө кеткен чыгым коэффициеттери $h(i,j)$ лар белгилүү болуусу керек. Ар бир жумуштун $t(i,j)$ узактыгын тармактагы бардык окуялардын эрте болуу мөөнөтү өзгөрбөй турган чоңдукка, б.а. эркин резервке барабар чоңдукка чоңойтуу максатка ылайыктуу.

1-мисал. 6-чиймедеги тармактуу графикти жекече оптималдаштыргыла. Жумуштардын узактыктарынын чек аралык маанилери $a(i,j)$, $b(i,j)$ лар, алардын нарктары $c(i,j)$ жана жумуштарды тездетүүгө кеткен чыгым коэффициеттери $h(i,j)$ лар 3-таблицада келтирилген.

◊ Жумуштардын $R_э(i,j)$ эркин резервдери буга чейин эсептелинген (2-табл. к.). Алардын нөлдүк эмес маанилери 3-таблицада берилген, ошол эле таблицада жекече оптималдаштыруунун жыйынтыктары келтирилген.

3-таблица

к/н	Жумуш (i,j)	Жумуштун узактыгы, суткада			Жумуштун эркин убакыт резерви, суткада, $R_э(i,j)$	Жумуштун наркы, суткада, $c(i,j)$	Жумушту тездетүүнүн чыгым коэффициенти, ш.а.б./суткасына $h(i,j)$	Проекттин наркынын өзгөрүшү, ш.а.б. $\Delta c(i,j)$
		$a(i,j)$	$t(i,j)$	$b(i,j)$				
1	(1,5)	2	4	7	6	20	4	3·4=12
2	(2,6)	1	1	8	16	78	6	7·6=42
3	(3,7)	2	4	10	5	42	7	5·7=35
4	(3,10)	1	4	7	13	30	12	3·12=36
5	(4,8)	4	8	16	8	75	5	8·5=40
6	(4,9)	7	9	15	17	50	3	6·3=18
7	(7,8)	2	5	8	2	60	10	2·10=20
8	(8,11)	5	6	10	11	45	7	4·7=28
9	(10,11)	4	7	12	9	36	9	5·9=45
Суммасы						436	-	276

Бардыгы болуп тармактуу графикте 19 жумуш эле. Эркин резервке ээ болбогон калган 10 жумуштун наркы төмөндөгүдөй:

$c(1,2)=10; c(1,3)=24; c(2,4)=19; c(3,5)=50; c(5,6)=20; c(5,7)=86;$

$c(6,8)=14; c(8,9)=28; c(8,10)=42; c(9,11)=34.$

Оптималдаштыруу жүргүзүлгөнгө чейинки проекттин наркы (14.31)-формула боюнча : $C=436+10+24+...+42+34=763$ (ш.а.б.).

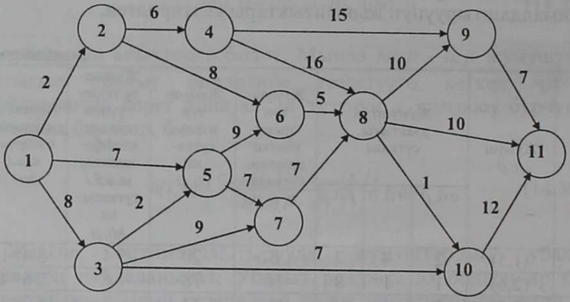
Жаңы пландын наркы $C-\Delta C'=763-276=487$ ш.а.б. ке барабар, б.а. 36 % ке азайды. ◊

Эскертүү. 3-таблицада резервдери толук иштетилген жумуштардын асты сызылган.

Жаңы оптималдаштырылган тармактуу графикте 23 толук жолдун ичинен төртөө критикалык жол болуп калды (9-чийме).

Проектти ишке ашырууда анын аткарылуу мөөнөтүн тездетүү проекттин наркынын өсүшүнө алып келет.

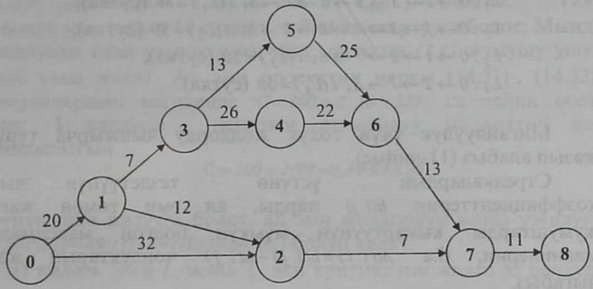
Демек, оптималдаштыруунун жыйынтыгында жумуштардын комплексин $t_{кр}=41$ суткада 487 ш.а.б. минималдуу нарк менен аткарууга мүмкүндүк берүүчү тармактуу графикти алдык.



9-чийме

Реалдуу шарттарда проекттин аткарылуусун тездетүү талап кылынуусу мүмкүн. Бул проекттин наркына таасир этүүсү шексиз, ал өсөт. Ошондуктан, проекттин наркы C менен анын аткарылуу $t=t_{кр}$ мөөнөтүнүн ортосундагы оптималдуу катышты, б.а. $C=C(t)$ функциясын аныктоо зарыл.

Тармактуу графикти оптималдаштыруу үчүн, жекече учурда $C(t)$ функциясын аныктоо үчүн эвристикалык методдорду, б.а. тармактын жекече өзгөчөлүктөрү эске алынган методдорду колдонууга болот.



10-чийме

2-мисал. 10-чиймедеги тармактуу графикти комплекстүү оптималдаштыргыла. Анда жумуштар мүмкүн болгон максималдуу узактыктары менен берилген. Оптималдаштырууга керектүү маалыматтар 4-таблицада көрсөтүлгөн.

4-таблица

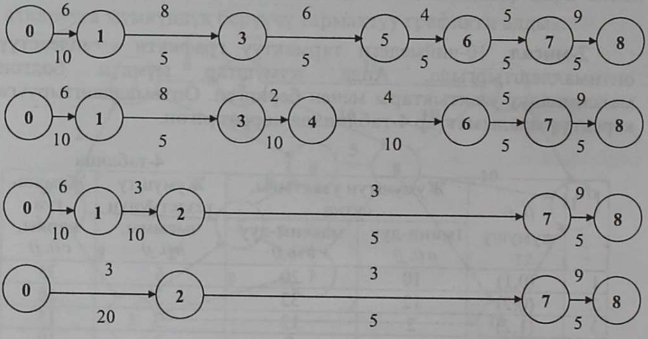
к/н	(i, j) жумушу	Жумуштун узактыгы, сутка		Жумушту тездетүүнүн чыгымы, $h(i, j)$	Жумуштун наркы, $c(i, j)$
		мини-дуу $a(i, j)$	максим-дуу $b(i, j)$		
1	(0,1)	10	20	6	35
2	(0,2)	12	32	3	50
3	(1,2)	2	12	3	15
4	(1,3)	2	7	8	10
5	(2,7)	2	7	3	10
6	(3,4)	16	26	2	50
7	(3,5)	8	13	6	15
8	(4,6)	12	22	4	40
9	(5,6)	20	25	4	30
10	(6,7)	8	13	5	25
11	(7,8)	6	11	9	20
Σ					300

◊ Баштапкы пландын аткарылуу мөөнөтү максималдуу жана наркы тиешелүү түрдө минималдуу, $C = 300$ ш.а.б. Тармактуу графиктеги бардык толук жолдорду аныктайлы:

$$L_1 : 0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8,\ t(L_1) = 89 \text{ (сутка)};$$
$$L_2 : 0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 7 \to 8,\ t(L_2) = 99 \text{ (сутка)};$$
$$L_3 : 0 \to 1 \to 2 \to 7 \to 8,\ t(L_3) = 50 \text{ (сутка)};$$
$$L_4 : 0 \to 2 \to 7 \to 8,\ t(L_4) = 50 \text{ (сутка)}.$$

Ыңгайлуулук үчүн толук жолдорду чынжырча түрүндө жазып алабыз (11-чийме).

Стрелкалардын үстүнө тездетүүнүн чыгым коэффициенттерин $h(i,j)$ ларды, ал эми төмөн жагына жумуштарды кыкартуунун мүмкүн болгон максималдык маанилерин, б.а $\Delta t(i,j) = b(i,j) - a(i,j)$ чоңдуктарын жазып чыгабыз.



11-чийме

I кадам. Проекттин аткарылуу мөөнөтүн кыскартуу үчүн критикалык жолдогу жумуштардын аткарылуу мөөнөтүн кыскартуу керек. Биздин учурда L_2 – критикалык жол, $t(L_2) = 99$ (с.).

Бул жолдогу тездетүүнүн чыгым коэффициенти $h(i,j)$ эң кичине болгон жумушту аныктайбыз: $h_{min}(i,j) = min\{h(0,1), h(1,3), h(3,4), h(4,6),$
$h(6,7), h(7,8)\} = min\ \{6, 8, 2, 4, 5, 9\} = 2$, б.а. $h_{min}(i,j) = h(3,4) = 2$. $(3,4)$ жумушун узактыгын 10 суткага чейин кыскартууга болот. Мында L_2 жолунун гана узундугу өзгөрөт, анткени $(3,4)$ жумушу ушул жолдо гана жатат. Ал эми проекттин наркы (14.31)-, (14.32)-формулалардын негизинде $C = 300 + 2 \cdot 10 = 320$ га чейин өсөт. Демек, I кадамда нарктын аткарылуу мөөнөттөн көз карандылыгын

$$C = 300 + 2(99 - t), 89 \le t \le 99$$

көрүнүшүндө жазууга болот, ал эми жолдордун жаңы узундугу $t(L_1) = t(L_2) = 89; t(L_3) = t(L_4) = 50$ (с.) болуп калат.

II кадам. Эми L_1 жана L_2 эки критикалык жолго ээ болдук. Проекттин аткарылуу мөөнөтүн бул жолдорду бир убакта кыскартуу менен кыскартууга болот. Бул эки жолду бирдей кыскартуу үчүн бир убакта экөөндө тең жаткан жумуштардын ичинен $h(i,j)$ минималдуу болгонун тандап алабыз. Мындай жумуш - $(6,7)$ жумушу, анткени $h_{min}(i,j) = min\{h(0,1), h(1,3), h(6,7), h(7,8)\} = min\ \{6, 8, 5, 9\} = 5$, $h_{min} = h(6,7) = 5$. Бул жумушту 5 суткага чейин кыскартууга болот. Анда проекттин наркы $C = 320 + 5 \cdot 5 = 345$ ке чейин өсөт. Ошентип, II кадамда

$$C = 320 + 5(89 - t), 84 \le t \le 89,$$
$$t(L_1) = t(L_2) = 84, t(L_3) = t(L_4) = 50$$

гө ээ болобуз.

III кадам. Аналогиялуу түрдө критикалык жолдун узундугун кыскартууну улантабыз. $h_{min}(i,j) = min\{h(0,1), h(1,3), h(7,8)\} = \quad = min\{6, 8, 9\} = 6$.Демек, $(0,1)$ жумушун 10 суткага чейин кыскартабыз.

Проекттин наркы $C = 345 + 6 \cdot 10 = 405$ ке чейин өсөт. Ошентип, III кадамда

$$C = 345 + 6(84 - t), 74 \le t \le 84,$$
$$t(L_1) = t(L_2) = 74, t(L_3) = 40. t(L_4) = 50$$

гө ээ болобуз.

IV кадам. $h_{min}(i,j) = min\{h(1,3); h(7,8)\} = min\{8;9\} = 8$, б.а. $h_{min}(i,j) = h(1,3) = 8$. $(1,3)$ жумушун 5 суткага чейин кыскартып, төмөндөгүлөрдү алабыз:

$$C = 405 + 8(74 - t),\ 69 \le t \le 74,$$
$$t(L_1) = t(L_2) = 69, t(L_3) = 40, t(L_4) = 50.$$

V кадам. $(7,8)$ жумушун 5 суткага чейин кыскартып ($h(7,8) = 9$ экендигин эске алуу менен), төмөндөгүлөргө:

$$C = 445 + 9(69 - t),\ 64 \le t \le 69,$$
$$t(L_1) = t(L_2) = 64, t(L_3) = 35, t(L_4) = 45$$

ке ээ болобуз.

VI кадам. Эми L_1 де кыскартылбаган $(3,5)$, $(5,6)$ жумуштары жана L_2де $(4,6)$ жумушу калды. Бул жумуштардын каалагандай бирин эле кыскартуу проекттин мөөнөтүн кыскартууга алып келбейт, анткени мында критикалык жолдордун бири гана кыскарып, экинчиси өзгөрүүсүз калат. Эки жолду тең кыскартыш үчүн, L_1 ден $(5,6)$ны, L_2 ден $(4,6)$ ны 5 суткага чейин кыскарталы. Анда:

$$h = h(4,6) + h(5,6) = 4 + 4 = 8,$$
$$C = 490 + 8(64 - t),\ 59 \le t \le 64,$$
$$t(L_1) = t(L_2) = 59, t(L_3) = 35, t(L_4) = 45$$

ке ээ болобуз.

VII кадам. $(4,6)$ жумушун дагы 5 суткага чейин кыскартууга болот. Ошол эле мөөнөткө $(3,5)$ ти да кыскартууга болот. Натыйжада

$$h = h(4,6) + (3,5) = 4 + 6 = 10,$$
$$C = 530 + 10(59 - t), 54 \le t \le 59,$$
$$t(L_1) = t(L_2) = 54, t(L_3) = 35, t(L_4) = 45$$

алынат.

Жыйынтыгында проектти 54 суткада ишке ашырууда 580 ш.а.б. чыгым кетээрин алдык. Аныкталган проекттин наркы менен аткарылуу мөөнөтүнүн арасындагы көз карандылыктын, б.а. $C(t)$ функциясынын жардамында нарк берилген учурда проекттин пределдик аткарылуу мөөнөтүн жана тескерисинче, берилген мөөнөттө аткаруу зарылчылыгы болгондо сарпталган каражаттын өлчөмүн аныктоого болот. Мисалы, проектти $t=79$(с.) аткаруу керек болсо, нарк 375 ш.а.б. ны түзөт. Ал эми проектин наркы 540 ш.а.б. болсо, аткарылуу мөөнөтү 55 суткага барабар болот. ◊

Ошентип, биз тармактуу графикти оптималдаштыруунун эвристикалык методдорунун бири менен тааныштык. Башка алгоритмдерди да колдонууга болот. Мисалы, баштапкы план катары жумуштарды максималдуу эмес, минималдуу $t(i,j)=a(i,j)$ узактыктары жана тиешелүү түрдө проекттин максималдуу наркы каралган планды алууга болот. Проекттин аткарылуу мөөнөтү удаалаш критикалык эмес жолдордо жаткан жумуштардын узактыктарын чоңойтуунун эсебинен чоңойтулат. Андан кийин $h(i,j)$ тездетүүнүн чыгым коэффициентинин кемүү тартибинде критикалык жолдогу жумуштардын узактыктары да чоңойтулат.

Жумуштардын нарктары аткарылуу мөөнөттөрүнөн сызыктуу көз каранды болгон учурда оптималдуу тармактуу графикти түзүү маселесин сызыктуу программалоо маселесине келтирүүгө болот. Анда чектөөлөрдүн эки группасында проекттин наркын минималдаштыруу талап кылынат. Чектөөлөрдүн биринчи группасы жумуштардын узактыктары (14.28)-барабарсыздык менен берилген чекте болуусун берет. Чектөөлөрдүн экинчи группасы тармактуу графиктин каалагандай толук жолунун узактыгы проекттин берилген директивдүү мөөнөтүнөн ашып кетпөөсүн түшүндүрөт. Бирок, мындай маселелерди сызыктуу программалоонун классикалык методдору менен чечүү эффективдүү эмес. Ошондуктан, атайын иштелип чыккан методдор колдонулат.

Көнүгүүлөр

14.1-14.2-маселелерде тармактуу графикти түзгүлө. Жумуштардын комплексинин аткарылуу мөөнөтүн, окуялардын жана жумуштардын убакыт параметрлерин тапкыла. Кашааларда жумуштардын узактыктары көрсөтүлгөн.

14.1. Жыгач сандык жасоо (жумушту бир адам аткарат). Тактайда сандыктын өлчөмдөрүн алуу (15 мүн.); тактайды бөлүктөргө бөлүү (12 мүн.); сандыктын бөлүктөрүн желимдөө (40 мүн.); сандыктын капкагына илмек кагуу (8 мүн.); сандык кургагыча күтүү (15 мүн.); илмектүү капкакты сандыкка кагуу (10 мүн.).

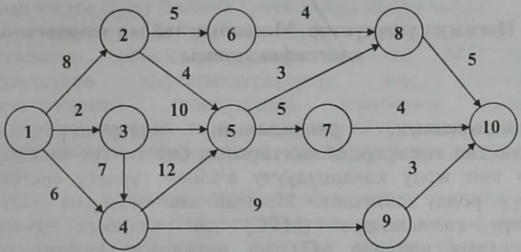
14.2. Машинанын дөңгөлөгүн алмаштыруу (жумушту эки адам аткарат). Багажниктен домкратты жана инструменттерди алуу (40 сек.); дискти дөңгөлөктөн чыгаруу (30 сек.); дөңгөлөктү бошотуу (50 сек.); домкратты машинанын астына коюу (26 сек.); машинаны көтөрүү (20 сек.); багажниктен запас дөңгөлөктү алуу (25 сек.); гайканы жана дөңгөлөктү чыгаруу (20 сек.); запас дөңгөлөктү окко орнотуу (10 сек.); гайканы окко катуу эмес бекитүү (15 сек.); машинаны түшүрүү жана домкратты жыйноо (25 сек.); домкратты багажникке салуу (10 сек.); гайканы акырына чейин катыруу (12 сек.); эски дөңгөлөктү жана инструменттерди багажникке салуу (40 сек.); дискти ордуна коюу (10 сек.).

14.3. 12-чиймедеги тармактуу графиктин бардык толук жолдорун жана критикалык жолун тапкыла; окуялардын болуусунун, жумуштардын башталышынын жана аякташынын эрте жана кеч мөөнөттөрүн эсептегиле; толук жолдордун жана окуялардын убакыт резервдерин, жумуштардын (толук, биринчи түрдөгү жекече, эркин жана көз карандысыз) убакыт резервдерин жана жумуштардын басымдуулук коэффициентин тапкыла.

14.4. Эгерде $t(5,7)$ жумушунун (12-чиймени к.) узактыгын а) $R_m(5,7)$; б) $R_l(5,7)$; в) $R_э(5,7)$; г) $R_к(5,7)$ чоңдуктарына чоңойтсок, проекттин аткарылуу мөөнөтү, жумуштардын жана окуялардын убакыт резервдери, жумуштардын басымдуулук коэффициенттери кандайча өзгөрөт ?

14.5. Эгерде ар бир (i,j) жумушунун (12-чиймени к.) узактыгын

а) $R_m(i,j)$; б) $R_l(i,j)$; в) $R_э(i,j)$; г) $R_к(i,j)$ чоңдуктарына чоңойтсок, проекттин аткарылуу мөөнөтү, жумуштардын жана окуялардын убакыт резервдери, жумуштардын басымдуулук коэффициенттери кандайча өзгөрөт?



12-чийме

14.6. 5-таблицада жооптуу аткаруучулардан жана эксперттерден алынган жумуштардын аткарылуу мөөнөттөрүнүн баалары келтирилген.

5 -таблица

к/н	(i,j), жумушу	Жумуштун аткарылуу мөөнөтүнүн баалары, апталар		
		Оптимистик, $t_0(i,j)$	Пессимистик, $t_п(i,j)$	Ыктымалдуу, $t_ы(i,j)$
1	(1,2)	6	10	7
2	(1,3)	3	7	5
3	(1,4)	5	11	9
4	(3,4)	10	15	12
5	(2,5)	8	14	11
6	(4,5)	2	5	4

а) тармактуу графикти түзгүлө; б) жумуштардын орточо узактыктарын; в) критикалык жолду жана анын узундугун тапкыла. Критикалык жолдун узундугу нормалдуу закон боюнча бөлүштүрүлгөн деп эсептеп, г) проекттин аткарылуу мөөнөтүнүн 19 аптадан ашпоосунун ыктымалдуулугун; д) 0,95 ыктымалдуулугунда проекттин аткарылуусунун максималдуу мөөнөтүн тапкыла.

XV глава. МАССАЛЫК ТЕЙЛӨӨ ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

15.1. Негизги түшүнүктөр. Массалык тейлөө теориясынын классификациясы

Экономиканын, финансынын, өндүрүштүн жана тиричиликтин көпчүлүк областтарында бир типтүү маселелерди чечүүдө көп жолу колдонулуучу атайын түрдөгү системалар маанилүү ролду ойношот. Мындай системаларды *массалык тейлөөнүн системалары* (МТС) деп атайбыз. Финансы-экономикалык чөйрөдө МТСтин мисалдары катары түрдүү типтеги банктарды (коммерциялык, инвестициялык, ипотекалык, инновациялык, сактоочу), салык инспекцияларын, аудитордук кызматтарды, байланыштын түрдүү системаларын, жүктөөчү, жүк түшүрүүчү комплекстерди (порттор, товардык станциялар), мунай зат куюучу станцияларды, тейлөө чөйрөсүндөгү түрдүү ишканаларды жана уюмдарды (дүкөндөр, сурап-билүү бюросу, чачтарач каналар, билеттик кассалар, валюта алмаштыруучу жайлар, ремонттук устаканалар, ооруканалар) кароого болот.

Ар кандай МТС өзүнүн структурасында кандайдыр бир сандагы тейлөөчү түзүлүштөрдү камтыйт. Аларды тейлөөнүн *каналдары* (приборлору, линиялары) деп атайбыз. Мисалы, каналдар түрдүү приборлор, бул же тигил операцияларды аткаруучу жактар (кассирлер, операторлор, чачтарачтар, сатуучулар) байланыш линиялары, автомашиналар, крандар, темир жолдор, май куюучу колонкалар ж.б. болушу мүмкүн.

Каналдардын санына карап МТС бир каналдуу жана көп каналдуу болуп бөлүнөт.

Талаптар МТСке регулярдуу эмес, кокустан келип түшөт. Талаптарды тейлөө деле кандайдыр бир кокустук убакытка созулат. Талаптардын агымынын жана тейлөө убактысынын кокустук мүнөзү МТСтин бир калыпта эмес жүктөлүшүнө алып келет: кандайдыр бир убакыт мезгилдеринде өтө көп сандагы талаптар келип түшөт, айрым учурларда МТС бош калат.

Массалык тейлөө теориясынын *предмети* болуп МТС саналат.

Массалык тейлөө теориясынын *максаты* – МТСти рационалдуу түзүү, МТСтин жогорку эффективдүүлүгүн камсыз кылуу үчүн анын ишин рационалдуу уюштуруу, талаптардын агымын жөнгө салуу боюнча сунуштарды иштеп чыгуу.

Бул максатка жетүү үчүн төмөнкүдөй *массалык тейлөө теориясынын маселелери* коюлат. Алар МТСтин иш жүргүзүүсүнүн эффективдүүлүгүнүн аны уюштуруудан (параметрлерден): талаптардын агымынын мүнөзүнөн, каналдардын санынан жана алардын өндүрүмдүүлүгүнөн жана МТСтин ишинин эрежелеринен көз карандылыгын аныктоодо турат.

МТСтин эффективдүүлүк көрсөткүчтөрү катары убакыт бирдик ичинде тейленген талаптардын орточо саны, кезектеги талаптардын орточо саны, күтүүнүн орточо убактысы, баш тартуунун ыктымалдуулугу, кезектеги талаптардын санынын анык бир мааниден ашып кетпөөсүнүн ыктымалдуулугу ж.б. колдонулат.

МТС эки негизги типке бөлүнөт: баш тартуу менен жана кезектүү МТС. *Баш тартуу менен МТСте* бардык каналдар бош эмес учурда келип түшкөн талап тейленбейт жана тейлөөнүн кийинки процессинде катышпайт. Мисалы, АТСтин иши: эгерде терилген телефондук номер бош эмес болсо, анда кардар тейленбейт жана бул номер менен байланышуусу үчүн кайрадан терүүгө туура келет. *Кезектүү МТСте* бардык каналдар бош эмес учурда келип түшкөн талап кезекке турат. Мындай МТСтер көбүнчө соодада, тиричиликтик жана медициналык тейлөөлөрдө, ишканаларда кездешет.

Кезектүү МТС кезектин уюштурулушуна карата чектүү же чексиз кезектүү, күтүүсү чектүү убакыттуу ж.б. болуп бөлүнөт.

МТСти классификациялоодо талаптарды тандоонун жана аларды бош каналдарга бөлүштүрүүнүн эрежесин аныктоочу тейлөөнүн тартиби өзгөчө мааниге ээ. Бул белги боюнча талаптар «биринчи келди – биринчи тейленди», «акыркы келди – биринчи тейленди» (бул принцип кампадагы буюмдар менен тейлөөдө колдонулат, анткени акыркылары ыңгайлуу болот) же приоритеттүү тейлөө принциптери боюнча жүргүзүлүшү мүмкүн.

15.2. Марковдук кокустук процесс түшүнүгү

МТСтин иш процесси кокустук процессти берет.

Кокустук процесс деп, кандайдыр бир системанын абалынын убакыт боюнча ыктымалдуулуктун закон ченемдүүлүктөрүнө тиешелеш өзгөрүү процессин түшүнөбүз.

Процесс *дискреттүү абалдуу* деп аталат, эгерде анын мүмкүн болгон $S_1, S_2, ..., S_n$ абалдарын алдын ала эсептөөгө мүмкүн болсо жана системанын бир абалдан экинчи абалга өтүүсү көз ирмемче болсо.

Процесс *үзгүлтүксүз убакыттуу* деп аталат, эгерде системанын бир абалынан экинчи абалына өтүү моменттери алдын ала фиксирленген эмес, кокустан болсо.

МТСтин жумуш процесси дискреттүү абалдуу жана үзгүлтүксүз убакыттуу кокустук процессти берет. Бул МТСтин абалы кокустук моментте кандайдыр бир окуянын болуусу менен секирик боюнча өзгөрөт дегенди түшүндүрөт. Мисалы, жаңы талаптын келип түшүүсү, тейлөөнүн бүтүүсү ж.б.

МТСтин жумушу марковдук процесс болсо анын математикалык анализи дээрлик жөнөкөйлөнөт. Кокустук процесс *марковдук* деп аталат, эгерде МТСтин каалагандай абалынын ыктымалдуулугу келечекте учурдагы абалынан гана көз каранды болсо жана мурунку абалдарынан көз каранды болбосо. Мисалы, S системасы таксидеги эсептегич болсун. t моментиндеги абалы буга чейин автомобиль басып өткөн километрдин саны менен мүнөздөлөт. Айталы, t_0 моментинде эсептегич S_0 дү көрсөтсүн. $t > t_0$ моментинде бул же тигил S_1 ди көрсөтүүсүнүн ыктымалдуулугу S_0 дөн гана көз каранды, ал эми t_0 гө чейин эсептегичтин көрсөтүүсү кандай убакыт моменттеринде өзгөрүүсүнөн көз каранды эмес.

Көпчүлүк процесстерди жакындаштырылган түрдө марковдук деп эсептөөгө болот. Мисалы, шахматтагы оюн процесси. S системасы шахматтын фигураларынын жыйындысы болсун. Системанын абалы t_0 моментиндеги тактайдагы атаандаштын фигураларынын саны менен мүнөздөлөт. $t > t_0$ моментинде материалдык өтүү атаандаштардын биринде болуусунун ыктымалдуулугу системанын t_0 моментиндеги абалынан (фигуралардын санынан) көз каранды, ал эми бул моментке чейин фигуралар качан жана кантип жоголгондугунан көз каранды эмес.

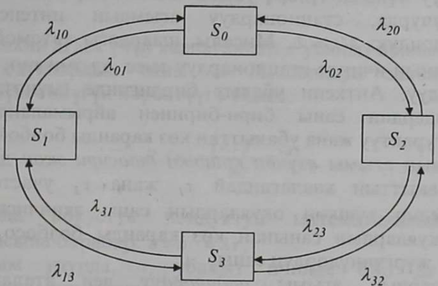
Дискреттүү абалдуу кокустук процесстердин анализинде *абалдардын графы* деп аталуучу геометриялык схеманы пайдалануу ыңгайлуу. Анда абалдар тик бурчтуктар же тегеректелер менен, ал эми бир абалдан экинчи абалга өтүүлөр багытталган кесиндилер же жаалар менен сүрөттөлөт.

Мисал. Төмөнкү кокустук процесстин абалдарынын графын түзгүлө.

S түзүлүшү эки түйүндөн турат. Алардын бири кокустук убакыт моментинде иштен чыгуусу, андан кийин алдын ала белгисиз кокустук убакытка созулган мөөнөттө оңдолуусу мүмкүн.

◊ Системанын мүмкүн болгон абалдары: S_0 - эки түйүн тең иштейт; S_1 - биринчиси оңдоочу жайда, экинчиси иштейт; S_2 - экинчиси оңдоочу жайда, биринчиси иштейт; S_3 - эки түйүн тең оңдоочу жайда.

Системанын абалдарынын графы төмөндө келтирилген.



1 – чийме

S_0дөн S_1 ге кеткен жаа биринчи түйүн бузулгандагы өтүүнү, S_1ден S_0гө кеткен жаа бул түйүн оңдолуп бүткөндөгү өтүүнү берет. Графта S_0дөн S_3кө, S_1ден S_2 ге кеткен жаалар жок. Бул түйүндөрдүн бири-биринен көз карандысыз иштен чыгат деген божомолдон келип чыгат. ◊

15.3. Окуялардын агымы

Окуялардын агымы деп, биринен кийин бири кандайдыр бир кокустук убакыт моментинде келүүчү бир тектүү окуялардын удаалаштыгын түшүнөбүз. Мисалы, телефондук станцияга чалуулар, сатып алуучулардын агымы, салык төлөөчүлөрдүн агымы.

Агым интенсивдүүлүк менен, б.а. убакыт бирдик ичинде МТСке келип түшүүчү окуялардын орточо саны менен мүнөздөлөт.

Окуялардын агымы *регулярдуу* деп аталат, эгерде окуялар биринен кийин бири анык бир убакыт аралыктарында келсе. Мисалы, жыйноочу цехтин конвейериндеги буюмдардын агымы.

Окуялардын агымы *стационардуу* деп аталат, эгерде анын ыктымалдуу мүнөздөөчүлөрү убакыттан көз каранды эмес болсо. Айрым учурда, стационардуу агымдын интенсивдүүлүгү турактуу чоңдук: $\lambda(t)=\lambda$. Мисалы, шаардагы автомобилдердин саны сутканын ичинде стационардуу эмес, ал эми пик сааттарда стационардуу. Анткени убакыт бирдигинде (мүнөттө) өткөн автомобилдердин саны бири-биринен айрымаланат, бирок орточосу турактуу жана убакыттан көз каранды болбойт.

Окуянын агымы *өзүнөн кийинки таасири жок* деп аталат, эгерде убакыттын каалагандай τ_1 жана τ_2 участокторунун бирине келип түшкөн окуялардын саны экинчисине келип түшкөн окуялардын санынан көз каранды болбосо. Мисалы, метродогу жүргүнчүлөрдүн саны.

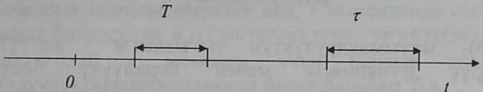
Окуялардын агымы *ординардуу* деп аталат, эгерде убакыттын кичине Δt аралыгында эки же андан көп окуянын келишинин ыктымалдуулугу бир окуянын келишинин ыктымалдуулугунан кичине болсо, б.а. окуялар бирден келсе. Мисалы, станцияга келген поезддердин агымы ординардуу, ал эми вагондордун агымы ординардуу эмес.

Окуялардын агымы *жөнөкөй* деп аталат, эгерде бир эле учурда ординардуу, стационардуу жана кийинки таасири жок болсо.

Жетишээрдик чоң n сандагы өз ара λ_i, $i=1,2,...,n$ интенсивдүүлүктөрү менен салыштырылуучу көз карандысыз стационардуу жана ординардуу агымдардын жыйындысынан жөнөкөй агымга жакын болгон агым алынат жана интенсивдүүлүгү ага катышкан бардык агымдардын интенсивдүүлүктөрүнүн суммасына барабар болот, б.а.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Ot убакыт огунда окуялардын жөнөкөй агымын кокустук чекиттердин чексиз удаалаштыгы катары карайбыз.



2-чийме

Жөнөкөй агым үчүн каалагандай τ убакыт аралыгына келип түшкөн окуялардын саны m Пуассондун закону боюнча бөлүштүрүлгөндүгүн көрсөтүүгө болот:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} . \qquad (15.1)$$

Мында кокустук чоңдуктун математикалык күтүүсү дисперсиясына барабар: $a=\sigma^2=\lambda\tau$.

Айрым учурда, τ убакыт ичинде бир да окуянын болбоосунун ыктымалдуулугу

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda t} \qquad (15.2)$$

формуласынан аныкталат.

Жөнөкөй агымдын эки коңшулаш окуясынын арасында T убакыт интервалынын бөлүштүрүлүшүн карайбыз.

(15.2)-нин негизинде t узундуктагы убакыт аралыгынан кийин бир да окуянын болбоосунун ыктымалдуулугу

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}, \tag{15.3}$$

ал эми карама-каршы окуянын ыктымалдуулугу

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{15.4}$$

га барабар экендигине ээ болобуз.

Кокустук чоңдуктун ыктымалдуулугунун тыгыздыгы анын бөлүштүрүү функциясынын туундусуна барабар, б.а.

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{15.5}$$

(15.5)- ыктымалдуулуктун тыгыздыгы же (15.4) – бөлүштүрүү функциясы менен берилүүчү бөлүштүрүү *көрсөткүчтүү* деп аталат.

Мына ошентип, эки коңшулаш каалагандай окуялардын арасындагы убакыт интервалынын бөлүштүрүлүшү көрсөткүчтүү болот, ал эми математикалык күтүүсү кокустук чоңдуктун орточо квадраттык четтөөсүнө барабар:

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda}. \tag{15.6}$$

Интенсивдүүлүгү λ болгон жөнөкөй агым үчүн убакыттын элементардык Δt кесиндисине жок дегенде бир окуянын болуусунун ыктымалдуулугу (15.4)-нүн негизинде төмөнкүгө барабар:

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t. \tag{15.7}$$

Бул жакындаштырылган түрдөгү барабардык $e^{-\lambda \Delta t}$ функциясын Δt даражасы боюнча даражалуу катарга ажыралышындагы биринчи эки мүчөсүн алмаштыруудан алынды жана ал Δt канчалык кичине болсо, ошончолук так болот.

15.4. Колмогоровдун теңдемеси. Абалдардын пределдик ыктымалдуулуктары

15.2-пункттагы мисалда каралган дискреттүү абалдуу жана үзгүлтүксүз убакыттуу марковдук процесстин математикалык моделин карайлы. Системанын S_i абалынан S_j абалына мүмкүн болгон өтүүлөрү $\lambda_{ij}, i = 1,2,...,n$ интенсивдүүлүгү менен окуялардын жөнөкөй агымынын таасиринде болот деп божомолдойбуз: системанын S_0 абалынан S_1 ге өтүүсү 1-түйүндүн баш тартуусу менен, ал эми S_1 ден S_0гө өтүүсү 1-түйүн ремонттолуп бүтүшүнүн натыйжасында болот ж.б.

Каралып жаткан системада мүмкүн болгон абалдар $:S_0, S_1, S_2, S_3$.

i- абалдын ыктымалдуулугу деп, t моментинде системанын S_i абалында болуусунун $p_i(t)$ ыктымалдуулугун айтабыз.

Каалагандай t моменти үчүн бардык абалдардын ыктымалдуулуктарынын суммасы бирге барабар, б.а.

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1. \qquad (15.8)$$

Системаны t моментинде карайбыз. Δt убакыт аралыгын берип, $t + \Delta t$ моментинде системанын S_0 абалында болуусунун $p_0(t + \Delta t)$ ыктымалдуулугун аныктайлы. Буга төмөндөгүдөй жолдор менен жетишүүгө болот.

1. Система t моментинде $p_0(t)$ ыктымалдуулугу менен S_0 абалында, Δt убакыт аралыгында андан чыккан жок.

Системаны бул абалдан интенсивдүүлүгү $(\lambda_{01} + \lambda_{02})$ болгон суммардуу жөнөкөй агым менен, б.а. (15.7)-нин негизинде жакындаштырылган түрдө $(\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t$ га барабар болгон ыктымалдуулук менен чыгарууга болот. Ал эми системанын бул абалдан чыкпоосунун ыктымалдуулугу $[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})]\Delta t$ га барабар. Биринчи ыкма боюнча системанын S_0 абалында болуусунун ыктымалдуулугу, ыктымалдуулуктарды көбөйтүү теоремасы боюнча

$$p_0(t)[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})]\Delta t$$

га барабар.

2. Система t моментинде $p_1(t)$ жана $p_2(t)$ ыктымалдуулугу менен S_1 же S_2 абалында болсун жана Δt убакыт ичинде S_0 абалына өтсүн.

λ_{10} (же λ_{20}) интенсивдүүлүгү менен система S_0 абалына ыктымалдуулугу жакындаштырылган түрдө $\lambda_{10}\Delta t$ (же $\lambda_{20}\Delta t$) га барабар агым менен өтөт. Бул ыкма боюнча системанын S_0 абалында болуусунун ыктымалдуулугу $p_1(t)\lambda_{10}\Delta t$ (же $p_2(t)\lambda_{20}\Delta t$) болот.

Ыктымалдуулуктарды кошуу эрежесин пайдаланып,

$$p_0(t+\Delta t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})]\Delta t$$

га ээ болобуз. Мындан төмөнкү келип чыгат:

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} - (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0(t).$$

$\Delta t \to 0$ пределге өтүп, $p_0'(t)$ туундусун алабыз:

$$p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0.$$

Натыйжада биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени алдык.

S системасынын калган абалдары үчүн ушундай эле ой жүгүртүп, абалдардын ыктымалдуулуктары үчүн *Колмогоровдун теңдемелери* деп аталуучу

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3 \end{cases} \tag{15.9}$$

дифференциалдык теңдемелердин системасын алабыз.

Колмогоровдун теңдемелерин түзүүнүн эрежеси: ар бир теңдеменин сол жагында i- абалдын ыктымалдуулугунун туундусу, ал эми оң жагында системаны i- абалга алып келүүчү агымдардын интенсивдүүлүктөрүнүн тиешелүү абалдардын ыктымалдуулуктарына көбөйтүндүлөрүнүн суммасы менен системаны бул абалдан чыгаруучу агымдардын интенсивдүүлүктөрүнүн суммасын i- абалдын ыктымалдуулугуна көбөйтүндүсүнүн айрымасы жазылат.

(15.9) – системада көз карандысыз теңдемелердин саны теңдемелердин жалпы санынан бирге кичине болгондуктан, ага (15.8) – теңдемени кошуу керек.

Колмогоровдун теңдемеси абалдардын ыктымалдуулуктарын убакыттан функция катары аныктоого мүмкүндүк берет. Өзгөчө кызыгууну системанын пределдик стационардык режимдеги $p_i(t)$ ыктымалдуулугу пайда кылат. Бул ыктымалдуулук $t \to \infty$ да *пределдик* (же *финалдык*) *ыктымалдуулук* деп аталат.

Кокустук процесстердин теориясында системанын абалдары чектүү болсо жана алардын ар биринен каалагандай башкасына өтүүгө мүмкүн болсо, пределдик ыктымалдуулуктардын жашаары далилденген.

S_i абалынын пределдик ыктымалдуулугу системанын *бул абалда болуусунун орточо салыштырмалуу убактысын* берет. Мисалы, $p_0 = 0.5$ ыктымалдуулугу, система жалпы жумуш убакыттын жарымында S_0 абалында болот дегенди түшүндүрөт.

Пределдик ыктымалдуулуктар туруктуу болгондуктан, Колмогоровдун теңдемелеринен

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 \end{cases} \tag{15.10}$$

алгебралык теңдемелердин системасы алынат.

(15.10) – системаны түздөн-түз абалдардын графын пайдалануу менен жана төмөнкү эрежени негизинде жазууга болот: теңдеменин сол жагында системаны i-абалдан чыгаруучу агымдардын интенсивдүүлүктөрүнүн суммасынын i- абалдын ыктымалдуулугуна көбөйтүндүсү, ал эми оң жагында системаны i- абалга алып келүүчү агымдардын интенсивдүүлүктөрүнүн тиешелүү абалдардын ыктымалдуулуктарына көбөйтүндүлөрүнүн суммасы жазылат.

1-мисал. 15.2-пунктта каралган мисалдагы S системасынын абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын $\lambda_{01}=1, \lambda_{02}=2, \lambda_{10}=2,\quad \lambda_{13}=2, \lambda_{20}=3, \lambda_{23}=1, \lambda_{31}=3, \lambda_{32}=2$ болгон учурда аныктагыла.

◊ (15.10)-система

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \tag{15.11}$$

көрүнүшүндө болот. Теңдемени чыгарып, $p_0 = 0{,}4;\ p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}27;\ p_3 = 0{,}13$ кө ээ болобуз, б.а. пределдик стационардык режимде S системасы жалпы убакыттын орточо 40%тинде S_0 абалында (эки түйүн тең иштейт), 20%де S_1 абалында (биринчи түйүн оңдоочу жайда, экинчиси, иштейт), 27%де S_2 абалында (биринчи түйүн иштейт, экинчиси оңдоочу жайда), 13% де S_3 абалында (эки түйүн тең оңдоочу жайда) болот. ◊

2-мисал. Эгерде биринчи жана экинчи түйүндөр убакыт бирдик ичинде 10 жана 6 ш.а.б. киреше алып келсе, ал эми оңдоо үчүн тиешелүү түрдө 4 жана 2 ш.а.б. чыгым сарпталса, стационардык режимде, 1-мисалдын шарттарында S системасын эксплуатациялоодогу орточо таза кирешени тапкыла. Түйүндөрдү оңдоонун убактысын эки эсе кичирейтсек, анда оңдоого кеткен чыгым эки эсе өсөт деп, экономикалык эффективдүүлүктү баалагыла.

◊ Биринчи түйүн убакыттын $p_0 + p_2 = 0{,}4 + 0{,}27 = 0{,}67$ бөлүгүндө, экинчи түйүн $p_0 + p_1 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$ бөлүгүндө иштейт, ал эми тиешелүү түрдө убакыттын $p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}13 = 0{,}33$, $p_2 + p_3 = 0{,}27 + 0{,}13 = 0{,}4$ бөлүктөрүндө оңдоочу жайда болот. Ошондуктан, системаны эксплуатациялоодогу убакыт бирдик ичиндеги орточо таза киреше

$$D = 0{,}67 \cdot 10 + 0{,}60 \cdot 6 - 0{,}33 \cdot 4 - 0{,}40 \cdot 2 = 8{,}18 \text{ ш.а.б.}$$

болот.

Оңдоонун орточо убактысын эки эсе кичирейтүү «оңдоолордун бүтүү» агымдарынын интенсивдүүлүктөрүн эки эсе чоңойтот, б.а. $\lambda_{10}=4, \lambda_{20}=6, \lambda_{31}=6, \lambda_{32}=4$. Бул учурда (15.10)-система төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Системадан $p_0 = 0{,}6; p_1 = 0{,}15; p_2 = 0{,}2; p_3 = 0{,}05$ти алабыз. $p_0 + p_2 = 0{,}8$, $p_0 + p_1 = 0{,}75$, $p_1 + p_3 = 0{,}2$, $p_2 + p_3 = 0{,}25$ жана биринчи, экинчи түйүндөрдү оңдоо эми 8 жана 4 ш.а.б. талап кылаарын эске алсак, убакыт бирдик ичиндеги орточо таза киреше төмөнкүгө барабар:

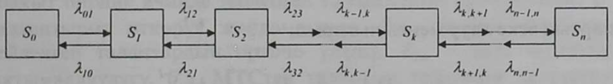
$$D_1 = 0{,}8 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 6 - 0{,}20 \cdot 8 - 0{,}25 \cdot 4 = 9{,}9 \text{ а.б.}$$

D_1 - Dдан 20% ке чоң, мындан оңдоону тездетүү максатка ылайыктуу экендиги түшүнүктүү. ◊

15.5. Жоголуу жана көбөйүү процесси

Бул процесстин аталышы бир катар биологиялык маселелер менен байланышкан жана ал биологиялык популяциянын сандык өзгөрүшүнүн математикалык модели болуп саналат.

Аталган процесстин абалдарынын графы төмөнкү көрүнүштө болот.



3-чийме

Системанын абалдарынын иреттештирилген $S_0, S_1, S_2, ..., S_k$ көптүгүн карайбыз. Каалагандай абалдан коңшу номердеги абалдарга гана, б.а. S_k абалынан S_{k-1}, S_{k+1} абалдарына гана өтүүгө болот.

Системаны графтагы стрелкалар боюнча өткөрүүчү окуялардын бардык агымдары жөнөкөй жана интенсивдүүлүктөрү $\lambda_{k,k+1}$ же $\lambda_{k+1,k}$ га барабар деп божомолдойбуз.

Жогорудагы графтын негизинде (15.10)-системаны түзүп алабыз.

S_0 абалы үчүн теңдеме

$$\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1 \qquad (15.12)$$

көрүнүшүндө жазылат. Ал эми S_1 үчүн $(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{21} p_2$ жана ал (15.12)-нин негизинде

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \qquad (15.13)$$

көрүнүшүнө келет.

Ушул сыяктуу эле, башка абалдардын пределдик ыктымалдуулуктары үчүн да теңдемелерди жазуу менен

$$\begin{cases} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1, \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n-1} p_n \end{cases} \qquad (15.14)$$

системасын алабыз.

(15.14)-системаны

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \qquad (15.15)$$

шартын эске алуу менен чыгарып,

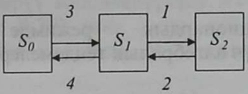
$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1},$$

(15.16)

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \; p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \dots, p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 \qquad (15.17)]$$

гө ээ болобуз. Мындагы $p_1, p_2, \dots, p_n$ дер үчүн туюнтмалардагы коэффициенттер (15.16)-дагы бирден кийинки кошулуучулар экендигин жеңил эле байкоого болот. p_k үчүн бул коэффициенттин алымы $S_k, k = 1,2,...,n$ абалына чейинки стрелкалардын үстүндөгү сандардын, ал эми бөлүмү стрелкалардын астындагы сандардын оңдон солго карай көбөйтүндүлөрүнө барабар болот.

Мисал. Жоголуу жана көбөйүү процесси төмөнкү граф менен берилген. Абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын тапкыла.



◊ (15.16) – формула боюнча $p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^{-1} \approx 0{,}471$. (15.17)-нин негизинде $p_1 = \frac{3}{4} \cdot 0{,}471 \approx 0{,}353$; $p_2 = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}471 \approx 0{,}177$, б.а. стацинардык режимде система убакыттын орточо 47,1% де S_0 абалында, 35,3% де S_1 абалында, 17,7%де S_2 абалында болот. ◊

15.6. Баш тартуу менен МТС

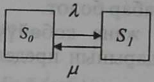
МТСтин эффективдүүлүк көрсөткүчтөрү катары төмөнкүлөрдү карайбыз.

A - МТСтин абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү, б.а. убакыт бирдик ичинде тейленген талаптардын орточо саны; Q - салыштырма өткөрүү жөндөмдүүлүк, б.а. система тарабынан тейленген талаптардын орточо үлүшү; $P_{б.т.}$ - баш тартуунун ыктымалдуулугу, б.а. МТСтен талаптын тейленбей кетүүсүнүн ыктымалдуулугу; $\bar{k}$ - бош эмес каналдардын орточо саны (көп каналдуу система үчүн).

Бир каналдуу баш тартуусу менен система.

Маселе карайбыз: бир канал бар, ага талаптар λ интенсивдүүлүгү менен келип түшөт. Тейлөө агымынын интенсивдүүлүгү μ. Системанын абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана анын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла.

S системасы S_0 - канал бош, S_1 - канал бош эмес абалдарында болуусу мүмкүн. Абалдарынын графы төмөнкүдөй болот.



4-чийме

Пределдик стационардык режимде абалдардын ыктымалдуулуктары үчүн алгебралык теңдемелер системасы

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_2 \end{cases} \tag{15.18}$$

көрүнүшүндө болот.

$p_0 + p_1 = 1$ шартын эске алып, (15.18) - ден абалдардын пределдик ыктымалдуулуктарын аныктайлы:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{15.19}$$

p_0 системанын S_0 абалында болуусунун, ал эми p_1 $-S_1$ абалында болуусунун орточо убакыттарын берет, б.а. тиешелүү түрдө системанын салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүгү Q ну жана баш тартуунун ыктымалдуулугу $P_{б.т.}$ ны аныкташат:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \tag{15.20}$$

$$P_{б.т.} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{15.21}$$

Системанын абсолюттук жөндөмдүүлүгүн салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүк Q ну талаптардын интенсивдүүлүгү λ га көбөйтүү аркылуу аныктайбыз:

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}. \tag{15.22}$$

1-мисал. Бир телефондук линияга мүнөтүнө интенсивдүүлүгү $\lambda = 0,9$ болгон чакыруулардын жөнөкөй агымы келет. Телефондук линиянын өндүрүмдүүлүгү мүнөтүнө $\mu = 0{,}7$. Телефондук линия бош эмес болгон учурда келген чакыруу тейленбейт. Телефондук линиянын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн аныктагыла.

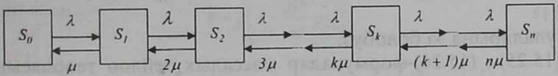
◊ Маселенин шарты боюнча $\lambda = 0{,}9$, $\mu = 0{,}7$. (15.20)-формула боюнча $Q = 0{,}7/(0{,}9 + 0{,}7) \approx 0{,}437$, б.а. келген талаптардын 43,7% ти гана тейленет. (15.21)-нин негизинде $P_{б.т.} = 0{,}563$. МТСтин абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү $A = 0{,}9 \cdot 0{,}437 = 0{,}393$, б.а. бир мүнөттө орточо 0,393 гана талап тейленет. Демек, бир гана телефондук линия болгондо МТС талаптарды жакшы тейлей албайт. ◊

Көп каналдуу баш тартуусу менен система.

Эрлангдын классикалык маселесин карайбыз: n канал бар, аларга талаптар λ интенсивдүүлүгү менен келип түшөт. Тейлөө агымынын интенсивдүүлүгү μ. Системанын абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана анын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла.

S системасы талаптардын санына карата номерленген $S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n$ абалдарында болуусу мүмкүн. S_k системада k талап болгондогу абал, б.а. системада k канал бош эмес.

МТСтин абалдарынын графы жоголуу жана көбөйүү процессинин графындай эле болот (5-чийме).



5-чийме

Талаптардын агымы с[...] каалагандай сол жаккы абалдан коңшу оң жаккы абалга λ интенсивдүүлүгү менен өткөрөт. Системаны оң жаккы абалдан коңшу сол жаккы абалга өткөрүүчү тейлөөлөрдүн агымынын интенсивдүүлүгү абалга жараша өзгөрүп турат. Эгерде МТС S_2 абалында (2 канал бош эмес) болсо, S_1 абалына 1-канал же 2-канал тейлеп бүткөндөн кийин өтүүсү мүмкүн, б.а алардын тейлөөлөрүнүн агымынын суммардык интенсивдүүлүгү 2μ га барабар. Ушундай эле S_3 абалын S_2 абалына өткөрүүчү тейлөөлөрдүн агымынын суммардык интенсивдүүлүгү 3μ га барабар, б.а. үч каналдын каалаган бири бошошу менен өтөт.

(15.16)-дан

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1} \qquad (15.23)$$

алынат. Мындагы $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}$ кошулуучулары $p_1, p_2, \ldots, p_n$ пределдик ыктымалдуулуктары үчүн туюнтулуштагы p_0 дүн коэффициенттерин беришет.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (15.24)$$

чоңдугу *талаптардын агымынын келтирилген интенсивдүүлүгү* же *каналдын жүктөлүү интенсивдүүлүгү* деп аталат жана ал бир талапты тейлөөгө кеткен орточо убакыттын ичинде келип түшкөн талаптардын санын берет.

(15.24)-формуланын негизинде пределдик ыктымалдуулуктар үчүн

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \qquad (15.25)$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (15.26)$$

формулаларына ээ болобуз.

(15.25)-, (15.26)-формулалар массалык тейлөө теориясынын негиздөөчүсүнүн урматына *Эрлангдын формулалары* деп аталышат.

МТСте баш тартуунун болуусунун ыктымалдуулугу бардык n канал бош эмес болуусунун ыктымалдуулугуна барабар, б.а.

$$P_{б.т.} = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (15.27)$$

Салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүк талаптын тейленүүсүнүн ыктымалдуулугу менен дал келгендиктен,

$$Q = 1 - P_{б.т.} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (15.28)$$

түрүндө аныкталат, ал эми мындан абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү үчүн

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right) \qquad (15.29)$$

алынат.

Бош эмес каналдардын орточо саны төмөнкү формуладан аныкталат:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kp_k .$$

A убакыт бирдик ичинде тейленген талаптардын орточо саны болгондуктан жана ар бир бош эмес канал убакыт бирдик ичинде μ талап тейлегендиктен бош эмес каналдардын орточо санын

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \qquad (15.30)$$

түрүндө да аныктоого болот. (15.24)-, (15.29)-формулаларды эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right). \qquad (15.31)$$

2-мисал. Вокзалда тиричилик жактан тейлөө устаканасында 3 уста иштейт. Усталар бош эмес учурда келген кардар тейлөөнү күтпөйт. Устаканага саатына 20 кардар келет. Уста бир кардарды орточо 6 мүнөттө тейлейт. Устакананын абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана устакананын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла.

◊ Шарт боюнча $n = 3$, $\lambda = 20$ (адам/с.), $\bar{t}_m = 6$ (мүнөт). Тейлөөнүн интенсивдүүлүгү $\mu = 1/\bar{t}_m = 1/6$ (адам/мүн.) $= 10$ (адам/с.). Устанын жүктөлүү интенсивдүүлүгү (15.24)-боюнча $\rho = 20/10 = 2$.

Абалдардын пределдик ыктымалдуулуктарын (15.25)- жана (15.26)-формулалар боюнча аныктайбыз:

$$p_0 = \left(1 + 2 + 2^2 / 2! + 2^3 / 3!\right)^{-1} = 0{,}158;$$
$$p_1 = 2 \cdot 0{,}158 = 0{,}316; \; p_2 = \left(2^2 / 2!\right)0{,}158 = 0{,}316;$$
$$p_3 = \left(2^3 / 3!\right)0{,}158 = 0{,}211,$$

б.а. стацинардык режимде устаканада убакыттын 15,8% де бир да кардар жок, 31,6% де бир кардар (бир уста бош эмес), 31,6% де эки кардар (эки уста бош эмес), ал эми 21,1% де үч кардар (үч уста бош эмес) болот. Тиешелүү формулалардан баш тартуунун ыктымалдуулугу $P_{б.т.} = p_3 = 0{,}211$, салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүгү $Q = 1 - 0{,}211 = 0{,}789$ жана абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү $A = 20 \cdot 0{,}789 = 15{,}78$ экендигине ээ болобуз. Мындан келген кардарлардын 100 нөн 78,9 у жана бир саттын ичинде орточо 15,78 и тейлене тургандыгы келип чыгат.

Бош эмес усталардын орточо саны $\bar{k} = 15{,}78 / 10 = 1{,}578$, б.а. ар бир уста жалпы убакыттын $157{,}8 / 3 = 52{,}6\%$ де бош эмес болот.

Устакананын ишинин эффективдүүлүгүн баалоодо кардарларды тейлөөдөн түшкөн киреше менен устакананын бош туруусундагы жоготууларды салыштыруу жана ынанаарлык чечим кабыл алуу керек. ◊

15.7. Кезектүү МТС

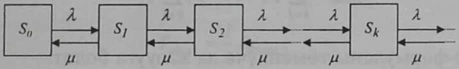
Кезектүү МТСте буга чейин белгилүү болгон эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүнөн сырткары төмөндөгүдөй көрсөткүчтөр каралат:
$L_{сист.}$ - системадагы талаптардын орточо саны; $T_{сист.}$ - талаптын системада болуусунун орточо убактысы; $L_{кез.}$ - кезектеги талаптардын орточо саны (кезектин узундугу); $T_{кез.}$ - талаптын кезекте болуусунун орточо убактысы; $P_{б.э.}$ - каналдардын бош эмес болуусунун ыктымалдуулугу.

Чексиз кезектүү бир каналдуу система.

Маселе карайбыз: кезегине эч кандай (кезектин узундугуна, күтүү убактысына) чектөө коюлбаган бир каналдуу системага келип түшкөн талаптардын агымынын интенсивдүүлүгү λ жана талаптарды тейлөөлөрдүн агымынын интенсивдүүлүгү μ болсо, абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана анын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн аныктагыла.

Система талаптардын санына карата номерленген $S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ...$. абалдарынын биринде болуусу мүмкүн. Мында S_0 - канал бош; S_1 - канал бош эмес, кезек жок; S_2 - канал бош эмес, кезекте бир талап бар; …;S_k - канал бош эмес, кезекте $(k-1)$ талап бар ж.б.

Абалдарынын графы төмөндө берилген (6-чийме).



6-чийме

Бул талаптарынын агымынын интенсивдүүлүгү λ, тейлөөлөрүнүн агымынын интенсивдүүлүгү μ жана абалдарынын саны чексиз болгон жоголуу жана көбөйүү процессин берет.

Эгерде $\rho < 1$, б.а. убакыт бирдик ичинде келип түшкөн талаптардын орточо саны тейленгендердин санынан кичине болсо, пределдик ыктымалдуулуктардын жашай, ал эми $\rho \geq 1$ болсо жашабай тургандагы далилденген.

Абалдардын пределдик ыктымалдуулуктарын аныктоо үчүн (15.16)-, (15.17) –формулаларды пайдаланабыз:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + ...\right)^{-1} = \left(1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^k + ...\right)^{-1}. \quad (15.32)$$

Пределдик ыктымалдуулуктар $\rho < 1$ болгондо жашагандыктан, кашаанын ичиндеги кошулуучулар бөлүмү ρ болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияны берет жана ал $1/(1-\rho)$ го барабар болгон суммага жыйналат. (15.32)-ден

$$p_0 = 1 - \rho \quad (15.33)$$

жана (15.17)-ни эске алсак, калган абалдар үчүн

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0, \ldots, p_k = \rho^k p_0, \ldots$$

же

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho), \ldots, p_k = \rho^k(1-\rho), \ldots \qquad (15.34)$$

го ээ болобуз.

Системадагы талаптардын $L_{сист.}$ орточо санын (15.34)-нүн негизинде аныктайбыз:

$$L_{сист.} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k. \qquad (15.35)$$

(15.35)-формуланы төмөнкүчө да жазууга болот:

$$L_{сист.} = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (15.36)$$

Кезектеги талаптардын орточо саны

$$L_{кез.} = L_{сист.} - L_{т.} \qquad (15.37)$$

түрүндө аныкталат. Мында $L_{т.}$ тейленип жаткан талаптардын орточо саны.

Тейленип жаткан талаптардын орточо санын математикалык күтүүнүн негизинде аныктоого болот:

$$L_{т.} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0),$$

б.а. каналдын бош эмес болуусунун ыктымалдуулугуна барабар:

$$L_{т.} = P_{б.э.} = 1 - p_0. \qquad (15.38)$$

(15.33)-нин негизинде

$$L_{т.} = P_{б.э.} = \rho \qquad (15.39)$$

алынат.

(15.37)- формула (15.36)-, (15.39)-ларды эске алсак,

$$L_{кез.} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{15.40}$$

түрүнө келет.

Талаптардын агымынын каалагандай мүнөзүндө, тейлөө убактысынын каалагандай бөлүштүрүлүшүндө жана тейлөөнүн каалагандай тартибинде талаптын системада (кезекте) болуусунун орточо убактысы системадагы (кезектеги) талаптардын орточо санын талаптардын агымынын интенсивдүүлүгүнө бөлгөнгө барабар:

$$T_{сист.} = \frac{1}{\lambda} L_{сист.}, \tag{15.41}$$

$$T_{кез.} = \frac{1}{\lambda} L_{кез.}. \tag{15.42}$$

(15.36)-, (15.40)-ларды эске алсак, (15.41),(15.42)-лер төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$T_{сист.} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \tag{15.43}$$

$$T_{кез.} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{15.44}$$

1-мисал. Дачалуу айылдын темир жол станциясын бир терезелүү касса тейлейт. Дем алыш күндөрдөгү жүргүнчүлөрдүн агымынын интенсивдүүлүгү 0,45 (адам/мүн.). Кассир бир жүргүнчүнү орточо 2 мүнөттө тейлейт. Кассанын эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн жана кезектеги жүргүнчүлөрдүн санынын үчтөн ашпоосунун ыктымалдуулугун тапкыла.

◊ Шарт боюнча $\lambda = 0,45$ (адам/мүн.), $\bar{t}_{т.} = 2$ (мүн.). $\rho = \lambda / \mu = \lambda \bar{t}_{т.} = 0,45 \cdot 2 = 0,9 < 1$ болгондуктан, кезек чексиз өспөйт. Демек, пределдик ыктымалдуулуктары жашайт.

(15.33)-формула боюнча кассанын бош болуусунун ыктымалдуулугу $p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,9 = 0,1$, ал эми бош эмес болуусунун ыктымалдуулугу $P_{б.э.} = 1 - 0,1 = 0,9$.

(15.34) - формула боюнча кассада 1,2,3,4 жүргүнчүнүн болуусунун ыктымалдуулугу

$$p_1 = 0,9(1 - 0,9) = 0,01;\ p_2 = 0,9^2(1 - 0,9) = 0,081;$$
$$p_3 = 0,8^3(1 - 0,9) = 0,0729;\ p_4 = 0,8^4(1 - 0,9) = 0,0656.$$

Кезекте 3төн көп эмес жүргүнчүнүн болуусунун ыктымалдуулугу

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,01 + 0,081 + 0,0729 + 0,0656 = 0,2295.$$

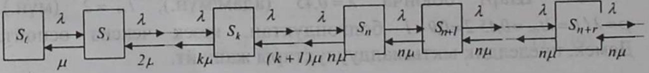
(15.36)-, (15.40)-(15.42)-лер боюнча $L_{кез.} = 0,9^2/(1 - 0,9) = 8,1$; $T_{кез.} = 8,1/0,45 = 18$ (мүн.); $L_{сист.} = 0,9/(1 - 0,9) = 9$; $T_{сист.} = 9/0,45 = 20$ (мүн.). ◊

Чексиз кезектүү көп каналдуу система.

Маселе карайбыз: n каналдуу чектелбеген кезектүү системага талаптардын агымы λ интенсивдүүлүгү келип түшөт. Талаптарды тейлөөнүн интенсивдүүлүгү μ болсо, системанын абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла.

Система талаптардын санына карата номерленген $S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, ...$ абалдарында болуусу мүмкүн. Мында S_0 - системада талап жок (бардык каналдар бош); S_1 - 1 канал бош эмес, калгандары бош; S_2 - 2 канал бош эмес, калгандары бош; ...; S_k - k канал бош эмес, калгандары бош; S_n - бардык n канал бош эмес; S_{n+1} - n канал бош эмес, кезекте бир талап бар;...; S_{n+r} - n канал бош эмес, кезекте r талап бар дегенди түшүндүрөт.

Абалдарынын графы төмөнкүчө болот.



Абалдардагы тейлөөлөрдүн агымынын интенсивдүүлүгү мурункулардан айрымаланат. Алар МТСтеги талаптардын санынын 0 дөн n ге чейин өзгөрүшүнө жараша μ дан $n\mu$ га чейин өзгөрөт, анткени тиешелүү түрдө тейлөө каналдарынын саны өсөт. МТСтеги талаптардын саны n ден көп болсо, тейлөөлөрдүн агымынын интенсивдүүлүгү $n\mu$ боюнча өзгөрбөстөн калат.

Эгерде $\rho / n < 1$ болсо, пределдик ыктымалдуулуктардын жашаарын көрсөтүүгө болот. Эгерде $\rho / n \geq 1$ болсо, кезек чексиз өсөт.

Жоголуу жана көбөйүү процессиндеги (15.16)-, (15.17)-формулаларды пайдаланып, төмөнкүлөрдү алабыз:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}, \tag{15.45}$$

$$p_1 = \rho p_0, \; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, \; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{15.46}$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \; \ldots, \; p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \ldots \tag{15.47}$$

Талаптын кезекте турушунун ыктымалдуулугу

$$P_{кез.} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 \tag{15.48}$$

формуласынан аныкталат.

Чексиз кезектүү n каналдуу МТС үчүн буга чейин колдонулган ыкмаларды колдонуп, төмөнкүлөрдү аныктайбыз:

бош эмес каналдардын орточо саны

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \tag{15.49}$$

кезектеги талаптардын орточо саны

$$L_{кез.} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}, \tag{15.50}$$

системадагы талаптардын орточо саны

$$L_{cucm.} = L_{kes.} + \rho. \qquad (15.51)$$

Талаптын системада жана кезекте болууларынын орточо убактыларын тиешелүү түрдө (15.41)-, (15.42)-лерден аныкталат.

Эскертүү. Чексиз кезектүү МТС үчүн $\rho < 1$ шарты орун алган учурда келген каалагандай талап тейленет, б.а. баш тартуунун ыктымалдуулугу $P_{б.т.} = 0$, салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүгү $Q = 1$, ал эми абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү талаптардын агымынын интенсивдүүлүгүнө барабар, б.а. $A = \lambda$.

2-мисал. Райондук салык инспекция бөлүмүнө саатына 5 адам келет. Бир инспектор бир документти орточо 20 мүнөттө даярдайт.

а) Кезек чексиз өспөй тургандай инспекторлордун минималдуу n_{min} санын жана $n = n_{min}$ болгондогу бөлүмдүн эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла;

б) Салыштырмалуу чыгым чоңдугу $C = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{кез.}$ формуласынан эсептелсе, бул чыгым минималдуу боло тургандай инспекторлордун оптималдуу $n_{опт}$ санын аныктагыла жана $n = n_{min}$, $n = n_{опт}$ болгондогу тейлөөнүн мүнөздөөчүлөрүн салыштыргыла;

в) Кезекте экиден көп эмес адамдын болуусунун ыктымалдуулугун тапкыла.

◊ **а)** Шарт боюнча $\lambda = 5(1/c) = 5/60 \approx 0{,}083$ (адам/мүн.). (15.24)-дөн $\rho = \lambda/\mu = \lambda \bar{t}_{m.} = 0{,}083 \cdot 20 \approx 1{,}7$. Кезек $\rho/n < 1$, б.а $n > \rho = 1{,}7$ болгондо чексиз өспөгөндүктөн, инспекторлордун минималдуу саны
$n_{min} = 2$ болот.

$n = 2$ болгондогу МТСтин мүнөздөөчүлөрүн аныктайбыз. (15.45)- боюнча $p_0 = \left(1 + 1{,}7 + 1{,}7^2 / 2! + 1{,}7^3 / 2!(2 - 1{,}7)\right)^{-1} \approx 0{,}081$, б.а. убакыттын орточо 8,1% де инспекторлор бош болот.

Кезектин болуусунун ыктымалдуулугу (15.48)-боюнча

$$P_{кез.} = \left(1{,}7^3 / 2!(2 - 1{,}7)\right) 0{,}081 \approx 0{,}66.$$

Кезектеги талаптардын орточо саны (15.50)-боюнча

$$L_{кез.} = \left(1{,}7^3 / 2 \cdot 2!(1 - 1{,}7/2)^2\right)0{,}081 \approx 4{,}43 .$$

Кезекте күтүүнүн орточо убактысы (15.42)-боюнча

$$T_{кез.} = 4{,}43 / 0{,}083 \approx 53{,}33 \text{ мүн.}$$

Системадагы талаптардын орточо саны жана талаптын универсамда болуусунун орточо убакыттары тиешелүү түрдө

$$L_{сист.} = 4{,}43 + 1{,}7 = 6{,}13 ,$$
$$T_{сист.} = 6{,}13 / 0{,}083 \approx 73{,}81 \text{ мүн.}$$

Бош эмес контролер-кассирлердин орточо саны $\bar{k} = 1{,}7$.

б) $n = 2$ болгондо салыштырмалуу чыгым чоңдугун эсептейли: $C = \frac{1}{\lambda} 2 + 3T_{кез.} = 2/0{,}083 + 3 \cdot 53{,}33 = 184{,}08$. n дин башка маанилери үчүн да бул чоңдукту эсептеп, төмөнкү таблицага түшүрөбүз.

Тейлөөнүн мүнөздөөчүлөрү	Инспекторлордун саны				
	2	3	4	5	6
p_0	0,081	0,166	0,180	0,182	0,183
$T_{кез.}$	53,33	4,93	0,97	0,20	0,04
C	184,08	50,94	51,10	60,85	72,41

$n = n_{опт} = 3$ болгондогу тейлөөнүн мүнөздөөчүлөрүн аныктайбыз:
$P_{кез.} = 0{,}178$; $L_{кез.} = 0{,}41$; $T_{кез.} = 4{,}933$ мүн.; $L_{сист.} = 2{,}11$; $T_{сист.} = 25{,}42$ мүн.; $\bar{k} = 1{,}7$; $k_3 = 0{,}567$.

$n = 3$ болгондогу тейлөөнүн мүнөздөөчүлөрүн $n = 2$ менен салыштырганда кезектин ыктымалдуулугу $P_{кез.}$, $L_{кез.}$, $T_{кез.}$, $L_{сист.}$, $T_{сист.}$, бош эмес каналдардын үлүшү k_3 азайды. Ал эми $\bar{k}$ жана A ошол боюнча эле калды.

в) Кезекте экиден көп эмес адам болуусунун ыктымалдуулугу:

$$p(r \le 2) = \underbrace{p_1 + p_2 + p_3}_{\substack{\text{(1 ден 3 ко чейин инспекторлор}\\ \text{бош эмес болгондо)}}} + \underbrace{p_{3+1} + p_{3+2}}_{\substack{\text{(кезекте 1 ден 2 ге чейин}\\ \text{кардар болгондо)}}} =$$

$$= 1 - P_{кез.} + p_{3+1} + p_{3+2} .$$

$n = 3$ үчүн (15.45)-(15.48)-лерди пайдаланып, төмөнкүнү алабыз:

$$p(r \le 2) = 1 - \frac{1{,}7^4}{3!(3-1{,}7)} 0{,}166 + \frac{1{,}7^4}{3 \cdot 3!} 0{,}166 + \frac{1{,}7^5}{3^2 \cdot 3!} 0{,}166 = 0{,}943 . \ \Diamond$$

3-мисал. Темир жол кассасы эки терезеден туруп, билеттерди A жана B пункттарына сатат. Эки пунктка билет сатып алуучулардын агымынын интенсивдүүлүгү бирдей: $\lambda_A = \lambda_B = 0{,}45$ (мүнөттө). Кассир бир жүргүнчүнү орточо 2 мүнөттө тейлейт. Билеттерди сатуунун эки варианты каралат:

1) Билеттер эки терезелүү бир кассада A жана B пункттарына сатылат.
2) Билеттер ар бири бир терезеден турган эки кассада: биринчисинде A пунктуна, экинчисинде B пунктуна сатылат.

а) Тейлөөнүн негизги мүнөздөөчүлөрү боюнча билеттерди сатуунун варианттарын салыштыргыла;

б) 2-вариант боюнча билет сатууга кеткен орточо убакыт 1-вариантка караганда аз боло тургандай бир жүргүнчүнү тейлөөнүн орточо убактысын кандайча өзгөртүүгө болот?

◊ **а)** 1-вариант боюнча эки каналдуу система болот жана ага талаптар $\lambda = 0{,}45 + 0{,}45 = 0{,}9$ интенсивдүүлүгү менен келет. Тейлөө агымынын интенсивдүүлүгү $\mu = 1/2 = 0{,}5$. $\rho = 1{,}8; \rho / n = 0{,}9 < 1$. Мындан пределдик ыктымалдуулуктардын жашаары келип чыгат. Тиешелүү формулалардан тейлөөнүн мүнөздөөчүлөрүн аныктайбыз: $p_0 = 0{,}0526$; $L_{кез.} = 7{,}67$; $T_{кез.} = 8{,}52$ мүн.; $L_{сист.} = 9{,}47$; $T_{сист.} = 10{,}5$ мүн.

2-вариант боюнча эки бир каналдуу системаны алабыз. Талаптар $\lambda = 0{,}45$ интенсивдүүлүгү менен келет. Тейлөө агымынын интенсивдүүлүгү $\mu = 1/2 = 0,5$. $\rho = \lambda / \mu = 0,9 < 1$ болгондуктан, пределдик ыктымалдуулуктар жашайт. Тейлөөнүн мүнөздөөчүлөрү: $L_{кез.} = 8,1$; $T_{кез.} = 18$ мүн.; $L_{сист.} = 9$; $T_{сист.} = 20$ мүн.

2-вариант боюнча кезектин узундугу, күтүүнүн орточо убактысы жана билетти сатып алууга кеткен жалпы убакыт көбөйдү. Анткени 1-вариант боюнча кассирлердин бош убакыттары аз: A пунктуна билет сатып алуучу жок болсо, B пунктуна сата берет жана тескерисинче. Ал эми 2-вариантта өз ара алмашуу жок.

б) 1-вариант боюнча жүргүнчүлөрдү тейлөөнүн орточо убактысы $\bar{t}_m = 2$ мүн. болгондо, билетти сатып алууга кеткен жалпы убакыт $T_{сист.1} = 10,5$ мүн. экендигин алганбыз. Шарт боюнча

$$T_{сист.2} < T_{сист.1} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} < T_{сист.1}$$

Мындан $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_m$ экендигин эске алып, $\dfrac{\bar{t}_m}{1 - \lambda \bar{t}_m} < T_{сист.1}$, $\bar{t}_m < \dfrac{T_{сист.1}}{1 + \lambda T_{сист.1}}$ же $\bar{t}_m < \dfrac{10,5}{1 + 0,45 \cdot 10,5} = 1,83$ мүн. ээ болобуз.

Демек, 2-вариант боюнча билет сатып алууга кеткен орточо убакыт, эгерде бир жүргүнчүнү тейлөөгө кеткен орточо убакыт 0,17 ден көп азайтса азаят. ◊

Чектүү кезектүү МТС. Чектүү кезектүү МТС жогорудагылардан кезектеги талаптардын саны (ал кандайдыр m санынан ашып кетпейт) чектүү болгондугу менен айрымаланат. Эгерде кезектеги бардык орундар бош эмес учурда талап келсе, ал тейленбестен кетет.

МТСтин абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктары жана эффективдүүлүк көрсөткүчтөрү буга чейинки пайдаланган ыкмадай эле аныкталат, айырмасы чектүү гана суммаланат. Тиешелүү формулалар таблицада келтирилген.

Талаптын системада жана кезекте болуусунун орточо убакыттары тиешелүү түрдө (15.41)- жана (15.42)-формулалар боюнча аныкталат.

4-мисал. Бензин куюучу станцияда бир колонка бар. Станциянын машиналар кезекке туруучу аянтчасына үч гана машина батат. Аянт бош эмес учурда келген машина кезекке турбайт, коңшу станцияга өтөт. Станцияга 2 мүнөттө орточо бир машина келет. Бир машинаны тейлөө орточо 2,5 мүнөткө созулат. Станциянын ишинин эффективдүүлүгүн аныктагыла.

◊ Бул маселенин математикалык модели чектүү кезектүү ($m = 3$) бир каналдуу МТС болот.

Станциянын бош болуусунун ыктымалдуулугу $p_0 = \dfrac{1 - 1{,}25}{1 - 1{,}25^{3+2}} = 0{,}122$. Баш тартуунун ыктымалдуулугу $P_{б.т.} = 1{,}25^{3+1} \cdot 0{,}122 = 0{,}297$. Салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүгү $Q = 1 - 0{,}297 = 0{,}703$. Абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү $A = 0{,}5 \cdot 0{,}703 = 0{,}352$, б.а. бир мүнөттө орточо 0,35 машина тейленет.

Кезектеги жана станциядагы машиналардын саны:

$$L_{кез.} = \frac{1{,}25^2\,[1 - 1{,}25^3(3 + 1 - 3 \cdot 1{,}25]}{(1 - 1{,}25^{3+2})(1 - 1{,}25)} = 1{,}559,$$
$$L_{сист.} = 1{,}559 + (1 - 0{,}122) = 2{,}437.$$

Машинанын кезекте жана станцияда болуу убакыттары:

$$T_{кез.} = \frac{1{,}559}{0{,}5} = 3{,}118,$$
$$T_{сист.} = \frac{2{,}437}{0{,}5} = 4{,}874.$$

МТСтин ишинин анализинен келген 100 машинанын 30у тейленбей ($P_{б.т.} = 0{,}297 = 29{,}7\%$) тургандыгы келип чыгат. Ошондуктан бир машинаны тейлөөнүн убактысын тездетүү же колонкалардын санын көбөйтүү же күтүү аянтчасын чоңойтуу керек. Оптималдуу чечим тейлөөчү персоналдын штатын кеңейтүү, күтүү аянтчасын чоңойтуу жана кошумча колонкаларды кошуу менен байланышкан чыгымдарды эске алуу менен кабыл алынат. ◊

Таблица

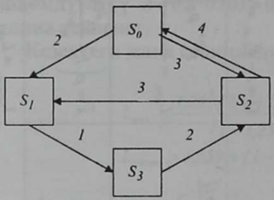
Көрсөткүчтөр	Чектүү кезектүү бир каналдуу МТС	Чектүү кезектүү көп каналдуу МТС
Пределдик ыктымалдуулуктар	$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$, $p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0, \dots, p_k = \rho^k p_0$	$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}(1-(\rho/n)^m)}{n \cdot n!(1-\rho/n)}\right]^{-1}$, $p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$, $p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0\ (r = 1,2,\dots,m)$
Баш тартуунун ыктымалдуулугу	$P_{б.т.} = P_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$	$P_{б.т.} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
Абсолюттук өткөрүү жөндөмдүүлүгү	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^{m+1} p_0)$	$A = \lambda \cdot Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Салыштырма өткөрүү жөндөмдүүлүгү	$Q = 1 - P_{б.т.} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$Q = 1 - P_{б.т.} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
Кезектеги талаптардын орт. саны	$L_{кез.} = \rho^2 \frac{[1 - \rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$L_{кез.} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n \cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$
Тейлөөдөгү талаптардын орт. саны (бош эмес каналдардын орт. саны)	$L_m = 1 - p_0$	$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Системадагы талаптардын орт. саны	$L_{сист.} = L_{кез.} - L_m$	$L_{сист.} = L_{кез.} + \bar{k}$

Көнүгүүлөр

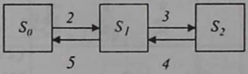
15.1. Система газдалган суу сатуу боюнча эки автоматтан турат. Алардын ар бири кокустук убакыт моментинде бош же бош эмес болуусу мүмкүн. Бул системанын абалдарынын графын түзгүлө.

15.2. Электрдик лампадан турган системанын абалдарынын графын түзгүлө. Лампа кокустук убакыт моментинде жанып турушу, өчүп турушу же иштен чыгуусу мүмкүн.

15.3. Графы 7,8-чиймелер менен берилген системанын абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын тапкыла.



7-чийме



8-чийме

15.4. Бир каналдуу (текшерүү бир группа аркылуу жүргүзүлөт)
автомашиналарды профилактикалык текшерүү пунктунун суткадагы иши каралат. Ар бир машинаны текшерүү жана кемчиликтерин аныктоо үчүн орточо 0,5 саат жумшалат. Текшерүүгө суткада 36 машина келет. Талаптардын жана тейлөөлөрдүн агымы жөнөкөй. Текшерүү пункту бош эмес учурда келген машина тейленбестен кетет. Профилактикалык текшерүү пункттун абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла.

15.5. 15.4-маселени $n=4$ үчүн чыгаргыла. Системанын салыштырмалуу өткөрүү жөндөмдүүлүгү 0,9 дан кем эмес боло тургандай каналдардын санын аныктагыла.

15.6. Чоң эмес шаарчадагы шаарлар аралык сүйлөшүү түйүнүнүн иши анализделет. Сүйлөшүү түйүнүндө бир телефондук аппарат бар. Суткада сүйлөшүүгө 240 талап келет.

Сүйлөшүүнүн орточо узактыгы 5 мүн. түзөт. Кезектин узундугуна эч кандай чек коюлбайт. Талаптардын жана тейлөөлөрдүн агымы жөнөкөй. Стационардык режимде сүйлөшүү пункттун абалдарынын пределдик ыктымалдуулуктарын жана эффективдүүлүк көрсөткүчтөрүн тапкыла

15.7. 15.6-маселени $n=3$ телефондук аппарат болгон учурда чыгаргыла.

15.8. Чоң эмес дүкөндө сатып алуучуларды бир сатуучу тейлейт. Бир кардарды орточо 4 мүн. тейлейт. Сатып алуучулардын агымынын интенсивдүүлүгү мүнөтүнө 3 сатып алуучу. Дүкөнгө 20 дан ашпаган адам батат. Кезекте 20 адам турган учурда келген кардар кезекке турбастан кетет. Дүкөнгө келген кардардын тейленбөөсүнүн ыктымалдуулугун тапкыла.

15.9. 15.8-маселени сатуучулардын саны үчөө болгон учурда чыгаргыла.

XVI глава. ЗАПАСТАРДЫ БАШКАРУУНУН МОДЕЛДЕРИ

16.1. Негизги түшүнүктөр

Запастардын рационалдуу өлчөмдөрү менен байланышпаган адам ишмердүүлүгүнүн бир да областы жок. Өндүрүштө жана соодада запастардын ашыкча көп болуусу да, жетишсиздиги да экономикалык жактан зыян алып келет. Биринчи учурда запастын ашыкча бөлүгүн түзүүгө жана сактоого сарпталган каражаттар айланууда катышпайт. Экинчиде өндүрүш процесси, калкты камсыздоо үзгүлтүккө учурайт. Туура жана өз учурунда запастарды башкаруунун оптималдуу стратегияларын жана ошондой эле запастардын нормативдүү деңгээлин аныктоо запас түрүндө тондурулган айланма каражаттарды пайдаланууга мүмкүндүк берет, жыйынтыгында ресурстарды пайдаланылуунун эффективдүүлүгү жогорулайт.

Запастарды башкаруунун маселелери өзүнүн реалдуу мазмуну жана чечилүү методдору боюнча ар түрдүү болушат. Ошондуктан запастарды башкаруу теориясында түрдүү моделдер бар. Запастарды башкаруунун негизги түшүнүктөрүн карайлы.

Талап. Запастагы продуктуга болгон талап детерминирленген (жөнөкөй учурда убакыт боюнча туруктуу) же кокустук болушу мүмкүн. Талаптын кокустугу талаптын кокустук моментте болушу (мүмкүн ар бир жолу запастын бирдей бирдигине) менен же убакыттын детерминирленген же кокустук моменттеринде талаптын кокустук көлөмү менен мүнөздөлүшү мүмкүн.

Складды толуктоо. Складды толуктоо анык бир убакыт интервалында мезгилдүү же запастын иштетилүү ченемине жараша, б.а. толуктоо үчүн буюртма запас анык бир деңгээлге жеткенде жүргүзүлөт.

Буюртманын көлөмү. Мезгилдүү жана запастын иштетилүү ченемине жараша толуктоодо буюртманын көлөмү буюртма берилип жаткандагы абалдан көз каранды болушу мүмкүн. Буюртма адатта запастын көлөмү берилген деңгээлге (буюртма чекитти деп аталуучу чекитке) жете тургандай бирдей эле чоңдукка берилет.

Жеткирүү убакыты. Запастарды башкаруунун идеалдаштырылган моделдеринде буюртма көз ирмемче жеткирилет деп божомолдонот. Башка моделдерде жеткирүү фиксирленген же кокустук убакыт интервалына кечигүүсү мүмкүн.

Жеткирүү наркы. Эреже катары, ар бир жеткирүүнүн наркы эки түзүүчүдөн буюртма берилүүчү партиянын көлөмүнөн көз каранды болгон жана партиянын көлөмүнөн көз каранды болбогон чыгымдардан турат деп божомолдонот.

Сактоонун чыгымдары. Запастарды башкаруунун көптөгөн моделдеринде складдын көлөмү чексиз деп эсептелинет. Көзөмөлдөөчү чоңдук катары сакталган запастардын көлөмү кызмат кылат. Мында запастын бирдигин убакыт бирдигинде сактоого анык бир өлчөмдө чыгым сарпталат деп божомолдонот.

Тартыштык үчүн жарыйма. Каалагандай склад тейлөө системасындагы анык бир типтеги продуктуга же буюмга болгон тартыштыкты жоюу үчүн түзүлөт. Запастын керектүү убакытта болбоосу жабдуулардын бош калуусу, өндүрүштүн үзгүлтүккө учуроосу ж.б. менен байланышкан жоготууларга алып келет. Мындай жоготууларды мындан ары тартыштык үчүн *жарыйма* деп атайбыз.

Запастын номенклатурасы. Жөнөкөй учурларда складда бир типтеги буюмдардын же бир тектүү продуктулардын запасы сакталат деп божомолдонот. Татаалыраак учурларда көп номенклатуралуу запас каралат.

Складдык системанын структурасы. Жалгыз складдын математикалык моделдери толугураак иштелип чыккан. Бирок практикада татаал структуралар: толукталуу мезгили жана буюртманы жеткирүү убакыттары түрдүү болгон, бирдей иерархиялуу деңгээлдүү складдардын арасында запастарды алмаштыруу мүмкүнчүлүгү болгон ж.б. складдардын иерархиялуу системасы да кездешет.

Запастарды башкаруу маселеси жөнгө салуунун колдонулуучу системасынан көз карандысыз запасты түзүүгө, сактоого кеткен жана тартыштык үчүн жарыйма менен байланышкан суммардык чыгымдар минималдуу боло тургандай түзүлүүчү запастын өлчөмүн, толукталуу убакыт моменттерин аныктоодо турат.

Запастарды башкаруунун моделдери детерминирленген (так белгилүү) жана ыктымалдуу (ыктымалдуулуктун тыгыздыгы менен берилген) болуусу мүмкүн. 1-чиймеде талаптын адатта запастарды башкаруунун моделдеринде колдонулуучу классификациясы келтирилген. Детерминирленген талап статикалык жана динамикалык болуусу мүмкүн. Статикалык болгондо керектөө убакыт боюнча өзгөрбөйт. Динамикалык болгондо талап анык болот, бирок убакыт боюнча өзгөрөт. Ыктымалдуу талап стационардуу (ыктымалдуулуктун тыгыздык функциясы убакыт боюнча өзгөрбөйт) жана стационардуу эмес (ыктымалдуулуктун тыгыздык функциясы убакыт боюнча өзгөрөт) болуусу мүмкүн.

1-чийме

Реалдуу шарттарда талаптын детерминирленген статикалык учуру сейрек кездешет. Мындай учурду жөнөкөй катары кароого болот. Мисалы, массалык пайдаланылган продуктуларды, айталы нанды керектөө бир күн менен башка күндө айрымаланышы мүмкүн. Бирок бул айырма өтө маанилүү эмес болот. Демек, талапты статикалык деп божомолдоо чындыктан алыс болбойт.

Талаптын мүнөзү тагыраак ыктымалдуу стационардуу эмес бөлүштүрүүнүн жардамында берилиши мүмкүн. Бирок модель айрыкча, убакыттын каралуучу мезгили чоңойгондо математикалык түрдө татаалданат.

Биз запастарды башкаруунун жөнөкөйүрөөк моделдерине токтолобуз.

16.2. Тартышсыз статикалык детерминирленген модель

$A(t)$, $B(t)$ жана $R(t)$ функциялары тиешелүү түрдө $[0,t]$ убакыт аралыгындагы запастардын толукталышын, алардын сарпталышын жана запастагы продуктуга болгон талапты туюндурсун. Запастарды башкаруунун моделдеринде адатта толукталуунун, сарпталуунун жана талаптын интенсивдүүлүктөрү деп аталуучу, бул функциялардын убакыт боюнча $a(t)$, $b(t)$ жана $r(t)$ туундулары колдонулат.

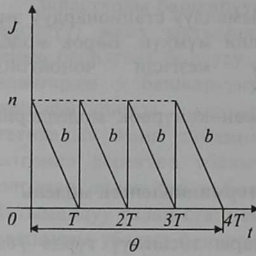
Тартыштыктын жоктугу жөнүндөгү божомолдоо запасталуучу продуктуга болгон талаптын толук канааттандырылышын, б.а. $r(t)$ жана $b(t)$ функцияларынын дал келүүсүн түшүндүрөт. Запасталуучу продуктунун каралуучу θ убакыт интервалындагы жалпы керектелиши N болсун. Запастын сарпталышы үзгүлтүксүз туруктуу интенсивдүүлүк менен, б.а. $b(t)=b$ болот деп божомолдонгон жөнөкөй моделди карайбыз. Бул интенсивдүүлүктү продукттун жалпы керектелишин ал сарпталган убакытка бөлүү менен аныктоого болот:

$$b=\frac{N}{\theta}. \qquad (16.1)$$

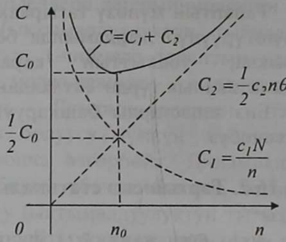
Буюртманын толукталышы бирдей көлөмдөгү партия менен болот, б.а. $a(t)$ функциясы үзгүлтүксүз эмес: продукт ташып келинген моменттерден башка бардык t ларда $a(t)=0$ болот; продукт ташып келинген моменттерде $a(t)=n$, мында n-партиянын көлөмү. Сарпталуунун интенсивдүүлүгү b га барабар болгондуктан, бардык партия

$$T=\frac{n}{b} \qquad (16.2)$$

убакыт ичинде пайдаланылып бүтөт.



2-чийме



3-чийме

Эгерде эсептөөнү биринчи партиянын келишинен баштап эсептесек, анда запастын деңгээли $J(t)$ баштапкы моментте бул партиянын көлөмүнө барабар болот, б.а. $J(0)=n$. Графиктик түрдө запастын деңгээли убакытка карата 2-чиймеде келтирилген.

Суммардык чыгымдарды C, запасты түзүүгө кеткен чыгымдарды C_1, запасты сактоого кеткен чыгымды C_2 аркылуу белгилейбиз жана T убакыт аралыгында бул чоңдуктарды табабыз.

Партиянын көлөмүнөн көз каранды болбогон продуктунун бир партиясын алып келүүгө кеткен чыгымдар c_1 ге, ал эми продукттунун бирдигин убакыт бирдигинде сактоого кеткен чыгымдар c_2 ге барабар болсун. θ убакыт ичинде продуктунун N санын сактоо керектигинен жана партиялар n көлөм менен алынып келингендиктен, партиялардын саны k төмөнкүгө барабар:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}. \tag{16.3}$$

Мындан

$$C_1 = c_1 k = c_1 \frac{N}{n} \tag{16.4}$$

ге ээ болобуз.

t убакыт моментиндеги запасты сактоонун көз ирмемдик чыгымы $c_2 J(t)$ га барабар. Анда $[0,T]$ убакыт аралыгындагы бул чыгымдар

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T \left(n - \frac{n}{T}t \right) dt = c_2 \left(nt - \frac{n}{2T}t^2 \right) \Bigg|_0^T = \frac{c_2 nT}{2}$$

ге барабар.

$[0,T]$ убакыт аралыгындагы орточо запас $nT/2$ ге барабар, б.а. бардык запасты сактоонун чыгымдары анын убакыт боюнча сызыктуу сарпталышында орточо запасты сактоонун чыгымына барабар.

$J(t)$ функциясынын мезгилдүүлүгүнөн жана (16.3)-формуладан θ убакыт аралыгындагы запасты сактоонун чыгымы төмөнкүгө барабар болот:

$$C_2 = \frac{c_2 nT}{2} k = \frac{c_2 nT}{2} \cdot \frac{N}{n} = \frac{c_2 TN}{2} = \frac{c_2 \theta n}{2} \qquad (16.5)$$

C_1 чыгымы партиянын көлөмү n ге тескери, ал эми C_2 чыгымы түз пропорционалдуу экендигин байкоо кыйын эмес. $C_1(n)$, $C_2(n)$ функцияларынын жана суммардык чыгымдардын

$$C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 \theta}{2} n \qquad (16.6)$$

функциясынын графиктери 3-чиймеде келтирилген.

$C(n)$ функциясынын минимум чекитинде анын туундусу $C'(n) = -\frac{c_1 N}{n^2} + \frac{c_2 \theta}{2} = 0$, мындан

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \qquad (16.7)$$

же (16.1)-ден

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} \qquad (16.8)$$

ге ээ болобуз.

(16.8) - формула Уилсондун формуласы же партиянын үнөмдүү көлөмүнүн формуласы деп аталат. Муну төмөнкүдөй жол менен да алууга болот. $C_1C_2 = 0{,}5c_1c_2N\theta$ көбөйтүндүсү n ден көз карандысыз турактуу чоңдук болот. Бул учурда эки чоңдуктун суммасы эң кичине мааниге $C_1 = C_2$ же

$$\frac{c_1N}{n} = \frac{c_2\theta}{2}n \tag{16.9}$$

болгондо ээ болот. Мындан (16.7)-ге ээ болобуз.

(16.9)-дан запастарды башкаруу маселесинин жалпы чыгымдары минимумга качан жана качан гана, запасты түзүүнүн чыгымдары запасты сактоонун чыгымдарына барабар болгондо ээ боловрун алабыз. Мында минималдык суммардык чыгымдар

$$C_0 = C(n_0) = \frac{2c_1N}{n_0}, \tag{16.10}$$

мындан (16.7)- жана (16.1)-нин негизинде $C_0 = \sqrt{2c_1c_2N\theta}$ же

$$C_0 = \theta\sqrt{2c_1c_2b} \tag{16.11}$$

га ээ болобуз.

θ убакыт ичинде оптималдуу партиялардын саны (16.3)-, (16.7) -лерди жана (16.1)-ни эске алсак

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2N\theta}{2c_1}} = \theta\sqrt{\frac{c_2b}{2c_1}}$$

ге барабар.

(16.7)-,(16.1)- жана (16.2)-нин негизинде оптималдуу партиянын сарпталуу убактысы төмөнкүгө барабар:

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0\frac{\theta}{N} \quad \text{же} \quad T_0 = \sqrt{\frac{2c_1\theta}{c_2N}} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2b}} \ . \tag{16.12}$$

1-маселе. Жыйноо ишканасынын деталдын кандайдыр тибине болгон жылдык керектөөсү 120000 деталды түзөт, бул деталдар өндүрүш процессинде бир калыпта жана үзгүлтүксүз сарпталат. Деталдарга бир жылда бир буюртма берилет жана буюртмада көрсөтүлгөн бирдей көлөмдөгү партиялар менен алынып келинет. Деталды складда сактоого суткасына 0,35 а.б., ал эми партияны ташып келүүгө 10000 а.б. чыгым сарпталат. Деталдардын кечигүүсү мүмкүн эмес. Буюртмада көрсөтүлүүгө тийиш болгон партиялардын үнөмдүү көлөмүн жана ташып келүүлөрдүн арасындагы интервалды аныктагыла (ташып келүү кечиктирилбейт деп божомолдонот).

◊ Шарт боюнча бир партияга кеткен чыгымдар c_1=10000 а.б., ал эми запастын бирдигин сактоого кеткен суткадагы чыгым c_2=0,35 а.б. Жалпы убакыт аралыгы θ=1 жыл =365 күн, бул мезгилдеги запастын жалпы көлөмү N=120000 деталь. (16.7)-формула боюнча

$n_0 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 10000 \cdot 120000}{0{,}35 \cdot 365}} \approx 4335$ дет., ал эми (16.12)-боюнча

$T_0 = n_0 \dfrac{\theta}{N} = 13{,}2 \approx 13$ күн.

Демек, партиянын үнөмдүү көлөмү 4335 деталга, ал эми ташып келүүлөрдүн арасындагы интервал 13 күнгө барабар. ◊

Практикада партиянын көлөмү (16.7)-формула боюнча эсептелинген оптималдуу n_0 дөн айрымалануусу мүмкүн. Каралган мисалда партияны 4 500 же 5 000 б. дан буюртма берүү ыңгайлуу болот. Мында суммардык чыгымдар кандай өзгөрөт деген суроо туулат.

Бул суроого жооп берүү үчүн $C(n)$ функциясын Тейлордун катарына n_0 чекитинин чеке белинде ажыратабыз. Партиянын көлөмүнүн жетишээрдик кичине Δn өзгөрүшүндө катардын биринчи үч мүчөсү менен чектелебиз:

$$C(n) = C(n_0) + C'(n_0)\Delta n + \frac{C''(n_0)}{2!}\Delta n^2 + \dots$$

$n = n_0$ болгондо $C'(n_0) = 0,$ $C''(n_0) = \dfrac{2c_1N}{n_0^3}$ экендигин эске алып, ал эми $C_0 = C(n_0)$ үчүн (16.10)-формуласын пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз

$$\frac{\Delta C}{C_0}=\frac{C(n)-C(n_0)}{C(n_0)}\approx\frac{C''(n_0)\Delta n^2}{2C(n_0)}=\frac{2c_1N\Delta n^2}{n_0^3(2C_1N/n_0)} \quad \text{же}$$

$$\frac{\Delta C}{C_0}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2. \qquad (16.13)$$

(16.13)-формула суммардык чыгымдардын партиянын оптималдуу көлөмүнө карата туруктуулугун берет, б.а. кичине Δn дерде чыгымдардын салыштырмалуу өзгөрүшү жакындаштырылган түрдө партиянын көлөмүнүн оптималдуугa салыштырмалуу өзгөрүшүнөн бир тартипке кичине.

2-маселе. 1-маселенин шарты боюнча, 5000 деталга буюртма бергенде минималдуу чыгымга салыштырмалуу запасты түзүүгө жана сактоого кеткен чыгым канча пайызга өсөөрүн аныктагыла.

◊ $n_0=4335$ оптималдуу көлөмгө салыштырмалуу партиянын көлөмүнүн өзгөрүшү $\Delta n/n_0=(5000-4335)/4335=0{,}153$ тү түзөт. (16.13)-нүн негизинде суммардык чыгымдын өзгөрүшү $\Delta C/C_0=0.153^2/2\approx0{,}012$, б.а. 1,2%ти түзөт. ◊

3-маселе. 2-маселенин шартында бардык партияларга жалпы эмес, өзүнчө буюртма берилсин, буюртманын аткарылуу мөөнөтү 16 күн болсун. Буюртманын чекитин, б.а. запастын кандай деңгээлинде кийинки партияга буюртма берүү керектигин аныктагыла.

◊ 2-маселени чечүүнүн жыйынтыгы боюнча ташып келүүлөрдүн арасындагы интервалдын узундугу 13,2 күнгө барабар, анда калыпка салынган өндүрүштүн шартында буюртманы запастын деңгээли 16-13,2=2,8 күндүк талапты канааттандыра тургандай жаңылоо керек.

Бир күндүк керектөө (запастын сарпталуу интенсивдүүлүгү) (16.1) –формула боюнча $b=120000/365=329$ деталь, анда буюртмалар дайыма запастын деңгээли $329\cdot2{,}8=922$ деталга жеткенде берилүүсү керек. ◊

16.3. Тартыштуу статикалык детерминирленген модель

Каралуучу моделде тартыштык бар бар деп эсептейбиз. Бул запасталуучу продукт жок болгон учурда, б.а. $J(t)=0$ болгондо талаптын интенсивдүүлүгү $r(t)=b$ боюнча сакталат, бирок запастын керектелиши жок - $b(t)=0$ болот, жыйынтыгында тартыштыктык b ылдамдыгы менен топтолот дегенди түшүндүрөт. Бул учурда запастын деңгээлинин өзгөрүшү 4-чиймеде келтирилген. Графиктин абцисса огунан төмөн терс маанилеринин аймагына кемүүсү тартыштыктын топтолушун түшүндүрөт.

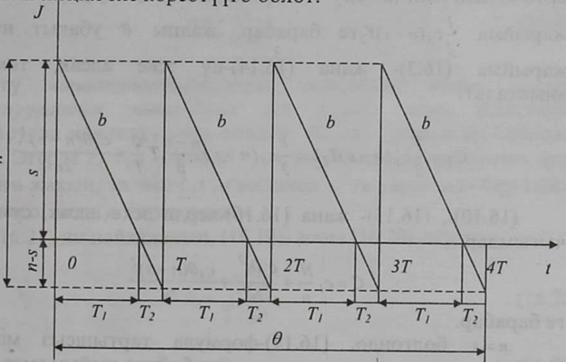
4 – чиймеден «арaанын» ар бир мезгили $T=\frac{n}{b}$ эки убакыт интервалына бөлүнө тургандыгы, б.а. $T=T_1+T_2$ экендиги көрүнүп турат. Мында T_1 - запас керектелген убакыт, T_2 – запас жок болгон жана тартыштык топтолгон убакыт. Бул тартыштык кезектеги партиянын келүү моментинде жабылат.

Тартыштыкты жабуу зарылдыгы ар бир партиянын келүү моментинде запастын максималдуу деңгээли s эми партиянын көлөмү n ге барабар эмес, андан T_2 убакыт ичинде топтолгон тартыштыктын $n-s$ чоңдугуна кичине экендигине алып келет.

Геометриялык жактан караганда

$$T_1=\frac{s}{n}T,\; T_2=\frac{n-s}{n}T \tag{16.14}$$

экендигин жеңил эле көрсөтүүгө болот.



4-чийме

Бул моделде суммардык чыгымдардын C функциясына C_1 (запасты толуктоонун чыгымы) жана C_2 (запасты сактоого кеткен чыгым) чыгымдарынан сырткары C_3 - тартыштык үчүн жарыйма чыгымын кошуу керек, б.а.

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

C_1 чыгымын мурункудай эле (16.4)-формуласы боюнча табабыз. 16.2-пунктта көрсөтүлгөндөй запастын сызыктуу сарпталуусунда C_2 чыгымдары орточо запасты сактоонун чыгымы керектөөнүн T_1 убакыт ичинде $sT_1/2$ге барабар. Ошондуктан (16.5)- жана (16.3)-нүн негизинде бул чыгымдар төмөнкүгө барабар

$$C_2 = \frac{c_2 s T_1}{2} k = \frac{c_2 s \cdot sT}{2n} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{c_2 s^2 \theta}{2n}. \qquad (16.15)$$

C_3 чыгымдарын эсептөөдө тартыштык үчүн жарыйма убакыт бирдик ичинде ар бир продукттун бирдиги үчүн c_3 кө барабар деп эсептейбиз. T_2 убакыт ичиндеги тартыштыктын орточо деңгээли $(n-s)T_2/2$ болгондуктан, бул T_2 убакыт ичиндеги жарыйма $\frac{1}{2}c_3(n-s)T_2$ге барабар, жалпы θ убакыт ичиндеги жарыйма (16.3)- жана (16.14)-нү эске алсак, төмөнкүчө аныкталат:

$$C_3 = \frac{1}{2}c_3(n-s)T_2 k = \frac{1}{2}c_3(n-s)\frac{n-s}{n}T\frac{\theta}{T} = \frac{c_3\theta(n-s)^2}{2n}. \qquad (16.16)$$

(16.10)-, (16.15)- жана (16.16)-лерди эске алсак, суммардык чыгымдар

$$C = c_1\frac{N}{n} + \frac{c\,\theta s^2}{2n} + \frac{c_3\theta(n-s)^2}{2n} \qquad (16.17)$$

ге барабар.

$n = s$ болгондо, (16.17)-формула тартышсыз моделдеги (16.6)-формуласы менен дал келээрин байкоо кыйын эмес.

Каралып жаткан запастарды башкаруунун маселеси C, (16.17)-функциясы минималдык мааниге ээ боло тургандай партиянын көлөмү n ди жана запастын максималдык деңгээли s ти аныктоого алынып келинет. Башкача айтканда, эки өзгөрүлмөлүү $C(n,s)$ функциясын экстремумга изилдөө керек. $\partial C / \partial n$, $\partial C / \partial s$ жекече туундуларын нөлгө барабарлап, өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин

$$\begin{cases} n^2 c_3 - (c_2 + c_3)s^2 = 2c_1 N / \theta, \\ s = n \dfrac{c_3}{c_2 + c_3} \end{cases} \tag{16.18}$$

системасына ээ болобуз.

Системаны чыгарып, тартыштуу модель үчүн партиянын үнөмдүү $\widetilde{n}_0$ көлөмүнүн жана запастын максималдык $\widetilde{s}_0$ деңгээлинин формулаларын алабыз:

$$\widetilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}, \tag{16.19}$$

$$\widetilde{s}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_3}{c_2 + c_3}} = \widetilde{n}_0 \frac{c_3}{c_2 + c_3}. \tag{16.20}$$

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3} \tag{16.21}$$

чоңдугу *канааттандырылбаган талаптан келип чыгуучу жоготуулардын тыгыздыгы* деп аталат жана запастарды башкарууда маанилүү роль ойнойт. $0 \le \rho \le 1$ экендигин байкоого болот. Эгерде c_3 түн мааниси c_2 ге караганда кичине болсо, анда ρ нөлгө жакын, ал эми c_3 түн мааниси c_2 ге караганда бир кыйла чоң болсо, анда ρ бирге жакын.

(16.21)-ни пайдаланып, (16.19)- жана (16.20)-ларды

$$\widetilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2 \rho}}, \tag{16.22}$$

$$\widetilde{s}_0 = \widetilde{n}_0 \rho \tag{16.23}$$

түрүндө жазууга болот.

(16.14)- жана (16.23)-лордон $T_1/T=\widetilde{s}_0/\widetilde{n}_0=\rho$ жана $T_2/T=(\widetilde{n}_0-\widetilde{s}_0)/\widetilde{n}_0=1-\rho$ экендиктерине ээ болобуз. Ошондуктан, канааттандырылбаган талаптан келип чыгуучу жоготуулардын тыгыздыгынын ρ го барабар болуусу T убактысынын $(1-\rho)100\%$ де продуктунун запасы жок болоорун түшүндүрөт.

(16.22)- жана (16.8)-формулаларды салыштырып, партиянын оптималдуу көлөмдөрү тартыштуу жана тартышсыз маселелер үчүн бирдей параметрлерде төмөнкүчө байланыша тургандыгы келип чыгат:

$$\widetilde{n}_0=\frac{n_0}{\sqrt{\rho}}. \tag{16.24}$$

Мындан, тартыштуу маселедеги оптималдуу партиянын көлөмү тартышсыз маселеге караганда $1/\sqrt{\rho}$ эсеге чоң экендигине ээ болобуз.

4-маселе. 1-маселенин шартында, жыйноодо ар бир деталдын жок болуусу суткасына 3,5 а.б. чыгым алып келсин деп эсептеп, партиянын үнөмдүү көлөмүн жана ташып келүүлөрдүн арасындагы интервалды тапкыла.

◊ Шарт боюнча c_3=3,5. Буга чейин (16.7)-формула боюнча n_0=4335 жана (16.12)-боюнча T_0= 13,2 экендиги аныкталган. (16.21) – формула боюнча канааттандырылбаган талаптан келип чыгуучу жоготуулардын тыгыздыгынын табалы $\rho=3{,}5/(0{,}35+3{,}5)=0{,}909$, б.а. ташып келүүлөрдүн арасындагы убакыт интервалынын 100(1-0,909)=9,1% де жыйноодо деталдар болбойт.

(16.24)-формула боюнча партиянын оптималдуу көлөмү $\widetilde{n}_0=4335/\sqrt{0{,}909}=4547$. (16.12)-нин негизинде $\widetilde{n}_0$ дүн чоңоюшуна пропорционалдуу ташып келүүлөрдүн арасындагы интервал да чоңоюшу керек, б.а. $\widetilde{T}_0=T_0/\sqrt{\rho}=13{,}2/\sqrt{0{,}909}=13{,}8\approx 14$ күн. ◊

16.4. Запастарды башкаруунун стохастикалык моделдери

Талабы кокустук чоңдук болгон запастарды башкаруунун стохастикалык моделдерин карайбыз. Бул факт тиешелүү моделдердин мүнөзүнө өзүнүн таасирин тийгизет жана алардын анализи татаалданат. Ошондуктан, жөнөкөйүрөөк моделдерди кароо менен чектелебиз.

T убакыт интервал ичиндеги талап r кокустук чоңдук жана анын бөлүштүрүү закону $p(r)$ же ыктымалдуулуктарынын тыгыздыгы $\varphi(r)$ (адатта $p(r)$ жана $\varphi(r)$ функциялары статистикалык маалыматтардын негизинде бааланат) деп божомолдойбуз. Эгерде талап r запастын деңгээли s тен төмөн болсо, анда ашыкча продуктуга ээ болуу (сактоо, сатуу) продуктунун бирдигине c_2 кошумча чыгымды талап кылат; тескерисинче талап r запастын деңгээли s тен жогору болсо, анда тартыштык үчүн продуктунун бирдигине c_3 а.б. га барабар жарыйма төлөөгө алып келет.

Стохатистикалык моделдерде кокустук чоңдук болуп эсептелген суммардык чыгымдардын функциясы катары анын орточо мааниси же математикалык күтүүсү каралат.

Каралуучу моделде $p(r)$ бөлүштүрүү законуна ээ дискреттүү кокустук r талапта суммардык чыгымдардын математикалык күтүүсү төмөнкү көрүнүштө болот:

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r). \tag{16.25}$$

(16.25)-туюнтмада биринчи кошулуучу продукттунун ашыкча $s-r$ бирдигине ($r \le s$ болгондо) кеткен чыгымды, ал эми экинчи кошулуучу продуктунун $r-s$ бирдигине ($r > s$ болгондо) жарыйманы берет.

Ыктымалдуулуктардын $\varphi(r)$ тыгыздыгы менен берилген үзгүлтүксүз кокустук талапта $C(s)$ үчүн туюнтма

$$C(s) = c_2 \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr + c_3 \int_{s+1}^{\infty} (r-s)\varphi(r)dr \tag{16.26}$$

көрүнүшүндө болот.

Запастарды башкаруу маселеси (16.25)- же (16.26)- суммардык чыгымдар минималдык маанини кабыл ала тургандай s запасын аныктоодо турат.

Дискреттүү кокустук r талабында (16.25)-туюнтма

$$F(s_0) < \rho < F(s_0 + 1) \tag{16.27}$$

барабарсыздыгын канааттандырган s_0 дө, ал эми үзгүлтүксүз кокустук r талабында (16.26)-туюнтма

$$F(s_0) = \rho \qquad (16.28)$$

барабардыгынан аныкталуучу s_0 дө минималдуу болуша тургандыгы далилденген.

Мында

$$F(s) = p(r < s) \qquad (16.29)$$

r талабынын бөлүштүрүү функциясы, $F(s_0)$ жана $F(s_0 + 1)$ анын маанилери; ρ - (16.21)-формула боюнча аныкталуучу канааттандырылбаган талаптан келип чыгуучу жоготуулардын тыгыздыгы.

5-маселе. Ишкана агрегатты запас блоктору менен бирдикте сатып алат. Бир блоктун баасы 5 а.б. Блок бузулганда жана анын запасы жок болгондо агрегат иштебейт. Агрегаттын бош туруусу жана жаңы блокко шашылыш буюртма берүү 100 а.б. турат. Алмаштырууну талап кылган блоктордун саны боюнча агрегаттарды тажрыйбалуу бөлүштүрүү 1-таблицада берилген.

1-таблица

Алмаштырылган блоктордун саны, r	0	1	2	3	4	5	6
r блок алмаштырылгандагы агрегаттардын статистикалык ыктымалдуулугу (үлүшү), $p(r)$	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00

Агрегаттар менен бирдикте алына турган запастык блоктордун оптималдуу санын аныктоо зарыл.

◊ Шарт боюнча c_2=5, c_3=100. (16.21)-формула боюнча блоктордун запасынын жетишсиздигинен келип чыгуучу жоготуулардын тыгыздыгын эсептейли: $\rho = 100/(5 + 100) = 0,952$.

(16.29)-ну эске алып, талаптын бөлүштүрүү функциясынын маанилерин аныктайбыз (2-табл.).

2-таблица

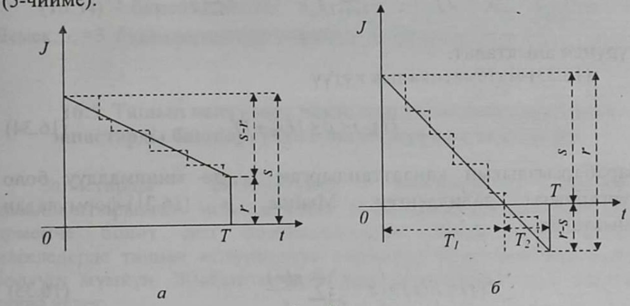
s	0	1	2	3	4	5	6	>6
r	0	1	2	3	4	5	6	>6
$F(s)$	0,00	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00

s_0=3 запасы (16.27)-барабарсыздыгын: $F(3) < 0,952 < F(4)$ канааттандыргандыктан оптималдуу болот. ◊

6-маселе. 5-маселени бөлүштүрүү функциясы көрсөткүчтүү $F(r)=1-e^{-\lambda s_0}$, $\lambda=0,98$ түрүндө болгондо жана r талабы үзгүлтүксүз кокустук чоңдук болгон учурда чыгаргыла.

◊ Запастык блоктордун оптималдуу санын (16.28)-формуладан аныктайбыз: $1-e^{-\lambda s_0}=\rho$, мындан $e^{-\lambda s_0}=1-\rho$ жана $s_0=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-\rho)$ келип чыгат. $\lambda=0,98$ болгондо $s_0=-(1/0,98)\ln 0,048\approx 3$(блок). ◊

Каралуучу моделдин шарттарында запасты сарптоо үзгүлтүксүз бирдей интенсивдүүлүк менен болот деп божомолдойбуз. Мындай жагдайды графиктик сүрөттөөгө болот (5-чийме).



5-чийме

5, а-чиймеси $r\le s$ учурга, ал эми 5, б-чиймеси $r>s$ учурга туура келет. Чындыгында $J(t)$ функциясынын графиги 5-чиймеде көрсөтүлгөндөй тепкичтүү сынык сызык болот, бирок моделди изилдөөнү жеңилдетүү үчүн $J(t)$ны бул сынык сызыкты тегиздөөчү түз сызык түрүндө кароо ыңгайлуу.

5, а-чиймесине туура келүүчү орточо запас

$$\overline{s_1}=\frac{1}{2}(s+(s-r))=s-\frac{1}{2}r \tag{16.30}$$

ге барабар.

5, б-чиймесине туура келүүчү орточо запас, (16.14)-формуланы эске алганда, $n=r$ болгондо төмөнкүгө барабар:

$$\overline{s_2} = \frac{1}{2} s \frac{T_1}{T} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{r}. \qquad (16.31)$$

T_2 мезгил ичиндеги 5, б-чиймесине туура келүүчү орточо тартыштык (16.14)-формуланы эске алганда, $n = r$ болгондо

$$\overline{s_3} = \frac{1}{2}(r - s)\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}\frac{(r - s)^2}{r}. \qquad (16.32)$$

Суммардык чыгымдардын математикалык күтүүсү

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s}\left(s - \frac{r}{2}\right)p(r) + c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{s^2}{r}p(r) + c_3 \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(r - s)^2}{r}p(r) \qquad (16.33)$$

түрүндө аныкталат.

(16.33)-математикалык күтүү

$$L(s_0) < \rho < L(s_0 + 1) \qquad (16.34)$$

барабарсыздыгын канааттандырган s_0 дө минималдуу боло тургандыгы далилденген. Мында ρ (16.21)-формуладан аныкталат:

$$L(s) = F(s) + \left(s - \frac{r}{2}\right)\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}, \qquad (16.35)$$

$L(s_0)$ жана $L(s_0 + 1)$ - (16.35)-функциянын маанилери, ал эми $F(s)$ функциясы (16.29)-нин негизинде табылат.

7 – маселе. Складдагы буюм бир айдын ичинде бир калыпта сарпталат. Бир буюмду сактоого кеткен чыгым 5 а.б. ны түзөт, ал эми бир буюм үчүн 100 а.б. жарыйма төлөнөт. Талапты үйрөнүү бир айда колдонулуучу буюмдардын санынын төмөнкүдөй бөлүштүрүүсүн берди (3-табл.)

3-таблица

Талап, r	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Статистикалык ыктымалдуулук, $p(r)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,0

Складдын оптималдуу бир айлык запасын аныктоо керек.

◊ 5-маселедегидей эле c_2=5, c_3=100, ρ=0,952.

$L(r)$ функциясынын маанисин 4-таблицанын жардамында аныкгайбыз.

4-таблица

s	r	$p(r)$	$\frac{p(r)}{r}$	$\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}$	$\left(s-\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}$	$F(r)$	$L(r)$
0	0	0.1	-	-	-	0,0	-
1	1	0,2	0,200	0,445	0,2225	0,1	0,3225
2	2	0,2	0,100	0,245	0,3675	0,3	0,6675
3	3	0,3	0,100	0,145	0,3625	0,5	0,8625
4	4	0.1	0,025	0,045	0,1575	0,8	0,9575
5	5	0,1	0,020	0,020	0,0900	0,9	0,9900
≥6	≥6	0,0	0,000	0,000	0,0000	1,0	1,0000

(16.34) – барабарсыздык: $L(3)<0{,}952<L(4)$, $s_0=3$ тө орун алат. Демек, $s_0=3$ буюмдардын оптималдуу запасы болот. ◊

16.5. Ташып келүүлөрү чектелген убакытка кармалган запастарды башкаруунун стохастикалык моделдери

Запастарды башкаруунун жогоруда каралган идеалдаштырылган моделдеринде запастын толукталышы көз ирмемче болот деп божомолдонгон. Бирок бир катар маселелерде ташып келүүлөрдүн кармалуу убактысы маанилүү болуусу мүмкүн. Жыйынтыгында аны моделдерде эске алууга туура келет.

Ташып келүүлөрдүн кармалуу θ убакытысынын ичинде узактыгы $T=\theta/n$ болгон ар бир n мезгилге бирден n партияга буюртма берилген.

$s_{бз}$ - запастын баштапкы деңгээли (биринчи мезгилдин башталышында);

s_i - i - мезгилдеги запас;

r_i - i - мезгилдеги талап;

q_i - i - мезгилдеги запастын толукталышы белгилөөлөрүн кийиребиз.

Анда n - мезгилдин акырында складка $\sum_{i=1}^{n} q_i$ бирдик продукт келип түшөт, ал эми сарпталуусу $\sum_{i=1}^{n} r_i$ бирдик болот, б.а.

$$s_n = s_{бз} + \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{16.36}$$

же

$$s_n = s - r, \tag{16.37}$$

мында

$$s = s_{бз} + \sum_{i=1}^{n} q_i, \tag{16.38}$$

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i. \tag{16.39}$$

Мурунку буюртма келээрден мурда берилүүчү акыркы n-мезгил үчүн буюртмага берилүүчү партиянын оптималдуу көлөмүн аныктоо талап кылынат.

Суммардык чыгымдардын математикалык күтүүсү бул учурда (16.25) – формула боюнча аныкталат, ал эми оптималдуу запас s (16.27)-формула, б.а.

$$F(s_0) < \rho < F(s_0 + 1) \tag{16.40}$$

боюнча табылат.

Оптималдуу s_0 запасын таап жана $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$ белгилүү болсо, q_n (16.38)-формуласы боюнча төмөнкүчө туюнтууга болот:

$$q_n = s_0 - \left(s_{бз} + \sum_{i=1}^{n} q_i \right). \tag{16.41}$$

8-маселе. Күнүнө буюртма берилүүчү тез бузулуучу товар дүкөнгө буюртма берилгенден соң 7 күндөн кийин алынып келинет. Кезектеги буюртма берүүдө запас акчалай туюнтканда 10 а.б. ны түзөт. Даярдалган күнү товар сатылса, 0,95 а.б. пайда алып келет, ал эми бул күнү сатылбаган товар кийин 0,10 а.б. арзанга сатылат.

Тажрыйбанын негизинде бул товарга болгон талаптын төмөнкүдөй бөлүштүрүүсү алынган (5-табл.)

5-таблица

r	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$p(r)$	0,00	0,00	0,01	0,02	0,05	0,08	0,11	0,12	0,14	0,13	0,10
r	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	>200
$p(r)$	0,08	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00

Буюртма берилгенден кийинки жетинчи күнкү буюртма берилүүчү товардын оптималдуу көлөмү q_7 ни аныктоо талап кылынат.

◊ Товардын тартыштыгынан жоготуулардын тыгыздыгы (16.21)-формула боюнча $\rho = 0,95/(0,10+0,95) = 0,905$ ке барабар. (16.29)-шартты эске алып, талаптын бөлүштүрүү функциясынын маанилерин таап алабыз (6-табл.).

6-таблица

s	r	$F(s)$	s	r	$F(s)$	s	r	$F(s)$	s	r	$F(s)$
0	0	0,00	50	50	0,16	100	100	0,86	150	150	0,96
10	10	0,00	60	60	0,27	110	110	0,84	160	160	0,97
20	20	0,01	70	70	0,39	120	120	0,89	170	170	0,98
30	30	0,03	80	80	0,53	130	130	0,92	180	180	0,99
40	40	0,08	90	90	0,76	140	140	0,94	≥190	≥190	1,00

(16.40)-шартты s_0=120 канааттандырат, б.а. $F(120) < 0,905 < F(130)$.

Мына ошентип, 7 күндөгү товардын оптималдуу запасынын суммасы 120 а.б. болушу керек. Жетинчи күнү буюртма берилүүчү товардын оптималдуу көлүмү (16.41)-формуланын негизинде q_7=120-(10+(10+20+10+10+20+10))=30 а.б. ны түзөт. ◊

Көнүгүүлөр

16.1. 2-маселенин шарттында партиянын көлөмү 10% ке өзгөргөндөгү запасты түзүүгө жана сактоого кеткен чыгымдардын өзгөрүшүн аныктагыла.

16.2. Кандайдыр бир продуктуга болгон бир күндүк талап 100 б. ны түзөт. Партиянын көлөмүнөн көз карандысыз бул продукттунун ар бир партиясына ээ болуунун чыгымдары 100 а.б. га, ал эми продукттунун бирдигин сактоонун чыгымдары суткасына 0,02 а.б. га барабар. Партиянын үнөмдүү көлөмүн жана мындай көлөмдөгү партияларды ташып келүүлөрдүн арасындагы интервалды аныктагыла.

16.3. 8-маселенин шартында буюртманы аткаруунун мөөнөтү 12 күнгө барабар. Запастын кандай деңгээлинде продуктунун кезектеги партиясына буюртма берүү керек?

16.4. 4-маселенин шартында запастын максималдуу деңгээлин жана ташып келүүлөрдүн арасындагы убакыт аралыгын аныктагыла.

16.5. Тартыштык бар жана ал күнүнө продуктунун бирдигине 0,03 а.б. жоготуу алып келет деп божомолдоп, 16.2-маселени чыгаргыла.

16.6. Кондитердик ишкана тортторду сатат. Торттун ар бир килограммынан 2 а.б. пайда алынат. Бардык тортту кийинки күнү 0,2 а.б.га арзан сатууга болот. Байкоонун негизинде тортко болгон талаптын бөлүштүрүүсү 3-таблицада келтирилгендей болоору алынган. Бир күндө даярдалуучу торттордун оптималдуу өлчөмүн аныктагыла.

16.7. 16.6-маселени тортко болгон талаптын бөлүштүрүүсү көрсөткүчтүү, $\lambda=0{,}9$ параметрлүү кокустук чоңдук деп эсептеп чыгаргыла.

16.8. Склад ай сайын кандайдыр бир буюм менен толтурулат. Жылдын биринчи беш айында толукталуу көлөмдөрү 10, 20, 20, 20 жана 30 буюмга барабар. Биринчи айдын башында баштапкы запас 10 буюмга барабар. Байкоонун негизинде товарга болгон талаптын бөлүштүрүүсү 5-таблицадагыдай болоору алынган. Убакыт боюнча толуктоо үчүн буюртманын жана складка ташып келүүлөрдүн арасындагы жылышуу 6 айга барабар. Бир буюмдун ашыкча болуусунан келип чыгуучу чыгым 10 а.б.га, ал эми жетишсиздигинен келип чыгуучу жоготуу 120 а.б. га барабар. Алтынчы айдагы складды оптималдуу толуктоону тапкыла.

Адабияттар

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. «Математические методы моделирования экономических систем». – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Гришин И.М., Фридман М.Н. «Исследование операций в экономике». – М.: ЮНИТИ,1997. – 407 с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. «Математическое программирование». – М: Высшая школа,1980. – 300 с.
4. М. Интрилигатор «Математические методы оптимизации и экономическая теория». – М.: Айрис, 2002. – 576 с.
5. Раманкулов С.Т. «Методы и модели исследования операций в экономике». – Бишкек,2002. – 335с.
6. Просветов Г.И. «Математические методы в экономике». – М.: Издательство РДЛ, 2005. – 160 с.
7. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Даитбеков Д.М. и др. «Экономико- математические методы и прикладные модели». – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391с.
8. А.В.Кузнецов, Н.И.Холод, Л.С.Костевич «Руководство к решению задач по математическому программированию». М:Вышейшая школа,1978.
9. Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н. и др. «Экономико-математические методы и модели». – Мн.: БГЭУ,2000. – 412 с.
10. Лабскер Л.Г., Бабешко Л. О. «Теория массового обслуживания в экономической сфере». – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319 с.
11. В.А. Фролькис «Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов». 2-е изд. – СПб.: Питер, 2002. – 320 с.

**Жусупбаев А., Маматкадырова Г.Т.,
Аширбаева А.Ж.**

ЭКОНОМИКАДАГЫ ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДДОРУ ЖАНА МОДЕЛДЕРИ

*Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн
окуу китеби*

Басманын редактору С.Ж. Асанканов
Техникалык редактору Ч.А. Мазенова
Компьютердик версткасы М.Т. Матраимов

Басууга 10.10.2008 кол коюлду. Форматы 60×84 1/16.
Офсеттик басылыш. «Таймс» ариби.
Көлөмү 21,0 б.т. Нускасы 500 экз. Заказ № 54.

ОсОО «Гүлчынар» басмаканасы.
Бишкек ш., Токтогул көч., 106.